PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 21. 1. November 1919. 20. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 23 am 15. November 1919.

INHALT:

Originalmitteilungen:
J. Franck u. P. Knipping, Die Ionisierungsspannungen des Heliums. S. 481.
H. Salinger, Über den Empfang ungedämpfter Wellenzüge durch Überlagerung. S. 488.
E. Beck, Zum experimentellen Nachweis der Ampèreschen Molekularströme. S. 490.
A. Korn, Eine mechanische Theorie der Serienspektra. I. S. 491.
E. Madelung, Die atomistische Konstitution einer Kristalloberfläche. S. 494.
P. Schreiber, Eine Näherungsformel für die Sättigungsspannung des Wasserdampfes. S. 496.
Zusammenfassende Bearbeitungen:
E. Schrödinger, Der Energieinhalt der Festkörper im Lichte der neueren Forschung. (Fortsetzung.) S. 497.
Besprechungen:
R. Mehmke, Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung. S. 504.
Personalien. S. 504.
Angebote. S. 504.
Gesuche. S. 504.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Ionisierungsspannungen des Heliums.

Von J. Franck und P. Knipping.

Durch neuere Untersuchungen[1]) über Zusammenstöße langsamer Elektronen mit Gasmolekülen und über die Ionisierungsspannungen in den Dämpfen einer großen Reihe von Metallen ist sichergestellt, daß der nach der Bohrschen Theorie geforderte Zusammenhang zwischen der Absorptionsserie der unerregten Atome und den Ionisierungsspannungen vollkommen den Tatsachen entspricht. Kurz zusammengefaßt lautet das Resultat dieser Untersuchungen: Die Elektronen stoßen in Metalldämpfen (und auch in Edelgasen) elastisch mit den Gasmolekülen zusammen, solange ihre Energie kleiner ist als $h\nu_r$, wobei mit ν_r die Frequenz des langwelligen Anfangsgliedes der Absorptionsserie bezeichnet wird. Ist die Energie $h\nu_r$ erreicht oder größer als $h\nu_r$ geworden, so verliert das Elektron beim Zusammenstoß diesen Energiebetrag, und es tritt die Emission von Licht der Frequenz ν_r auf. Da diese Linie in einer Zahl von Fällen als Resonanzlinie erkannt worden ist, so wird das Potential, das ein Elektron durchlaufen haben muß, um die Energie $h\nu_r$ zu besitzen, oft als Resonanzpotential bezeichnet[2]). Von den weiteren Gliedern der Absorptionsserie läßt sich nach dem Prinzip des unelastischen Elektronenstoßes bisher nur die ultraviolette Grenzfrequenz der Absorptionsserie nachweisen. Hier wird der Betrag $h\nu_\infty$ verbraucht, und es tritt Ionisation des Gases ein; das Elektron hat, um diesen Energiebetrag zu besitzen, die Ionisierungsspannung durchlaufen. Bestimmungen der Resonanzpotentiale und der Ionisierungsspannungen können somit zur Kontrolle der Theorien verwandt werden, die über die Konstitution der Atome aufgestellt sind. Genaue und durch Spektralbeobachtungen mit größter Präzision bestätigte Aussagen über die Atomkonstitution liegen bisher nur vor in Fällen, in denen es sich um Atome handelt, die nur ein Elektron besitzen, d. h. um das Wasserstoffatom und das einfach geladene positive Heliumatom. Nach den glänzenden Bestätigungen der Bohr-Sommerfeldschen Berechnungen dieser Fälle, vor allem der Feinstruktur der Fowler-Serie, die von Paschen[1]) untersucht wurde, kann man mit Sicherheit als die Ionisierungsspannung des H-Atoms $= 13{,}52$ Volt ansetzen und für das positive Heliumatomion den vierfachen Betrag davon $= 54{,}08$ Volt, obgleich diese Größen naturgemäß nicht der direkten Messung zugänglich sind. Für den Fall, daß zwei Elektronen sich am Aufbau beteiligen, sind die Verhältnisse schon unsicherer, so liegen beim Wasserstoffmolekül zwar ganz bestimmte Ansätze vor, jedoch wird man wohl nicht sagen dürfen, daß trotz aller bemerkenswerten Erfolge z. B. das Bohr-Debyesche Wasserstoffmolekül mit Sicherheit richtig wäre. Geradeso liegt es bei dem Modell des normalen Heliumatoms. Hier liegen zwei Ansätze vor, der von Bohr und neuerdings die Berechnung von Landé[2]). Bohr nimmt an, daß im unerregten Zustand

1) Literatur siehe bei J. Franck und G. Hertz, diese Zeitschr. **20**, 132—143, 1919.

2) Der Name Resonanzpotential scheint uns prinzipiell berechtigt, denn unseres Ermessens folgt aus den Bohrschen Anschauungen, daß in jedem Falle die langwellige Grenzlinie der Absorptionsserie eine Resonanzlinie ist. Wenn ein Elektron aus seiner stabilen Ruhebahn durch Lichtabsorption in die nächstfolgende Bahn gehoben wird, so kann bei seiner Rückkehr in den Normalzustand nur derselbe Sprung des Elektrons rückwärts wieder erfolgen, d. h. es muß Licht derselben Wellenlänge, das absorbiert wurde, remittiert werden. Diese Tatsache wird es ermöglichen, auch bei Metallen mit sehr hohem Siedepunkt die Ionisierungsspannung zu berechnen, wenn man die Lage der Resonanzlinie feststellt, die sich nach Wood schon bei äußerst tiefen Dampfdrucken nachweisen läßt.

1) Paschen, Ann. d. Phys. **50**, 901, 1916.

2) Landé, diese Zeitschr. **20**, 228, 1919.

beide Elektronen auf einer gemeinschaftlichen einquantigen Bahn kreisen. Wird ein Elektron weggenommen, so ergibt sich, daß dazu ein Energiebetrag aufzuwenden ist, der das $2^1/_8$ fache der Ionisierungsspannung des Wasserstoffatoms beträgt; also eine Ionisierungsspannung von 28,73 Volt. Der erste Sprung des Elektrons von der ein- auf die zweiquantige Bahn würde bei strenger Wasserstoffähnlichkeit des Heliums $^3/_4$ dieses Betrages, also eine Resonanzspannung von 21,55 Volt ergeben. Da strenge Wasserstoffähnlichkeit wegen des Vorhandenseins des zweiten Elektrons naturgemäß nicht vorliegt, wird man aus diesem Wert nur einen Anhaltspunkt für die Größe des Resonanzpotentials entnehmen dürfen. Landé ist es neuerdings gelungen, indem er die gegenseitige Störung der Elektronenbahnen berücksichtigt, und die verschiedenen Ellipsenbahnen berechnet, die bei azimutaler, radialer uud räumlicher Quantelung auftreten, den allgemeinen Verlauf der bekannten Heliumserien wiederzugeben, wobei angenommen wird, daß die Hauptserien von zweiquantigen Bahnen als Ruhebahnen ausgehen; das unerregte Helium enthält hier zwei einquantige Bahnen mit verschiedenen Radien und Lagen im Raum. Auf seinen Energiegehalt wird rückwärts aus den mehrquantigen Bahnen extrapoliert mit dem Resultat, daß die Ionisierungsspannung des normalen Heliums etwas größer sein sollte, als die nach Bohr berechnete. Auf dieses Resultat der größeren Ionisierungsarbeit wird besonderer Wert gelegt, da bei allen Atommodellen angenommen wird, daß das stabilste Modell der Wirklichkeit entspricht.

Experimentell liegen über die Ionisierungsspannung des Heliums eine Reihe von Arbeiten vor, die alle zu dem Resultat kamen, daß die Ionisierungsspannung zwischen 20 und 21 Volt läge[1]). Dieser Wert stimmt angenähert mit dem überein, der sich nach Bohr als die Resonanzspannung ergeben sollte. Bohr und van der Bijl haben infolgedessen der Vermutung Ausdruck gegeben, daß die bei 20,5 Volt beobachtete Ionisation sekundär durch einen lichtelektrischen Effekt an den Elektroden bedingt sei.

Der eine von uns hat in Gemeinschaft mit Hertz darauf hingewiesen, daß man sich der Bohr-van der Bijlschen Anschauung nur anschließen könnte, wenn man auch noch einen Photoeffekt an Verunreinigungen im Gas mit zur Deutung der Resultate heranzieht, da bei einer Resonanzspannung von 20,5 Volt eine so kurzwellige Strahlung entsteht, daß alle in Frage kommenden gasförmigen Verunreinigungen schon hierdurch ionisiert werden können. Indirekte Schlüsse auf die Ionisierungsspannung des Heliums liegen ferner vor von Richardson und Bazzoni, die die ultraviolette Grenze der Heliumspektren untersuchten durch Feststellung der Geschwindigkeit von lichtelektrisch ausgelösten Elektronen. Sie finden, daß die ultraviolette Grenze zwischen 470 Å und 420 Å liegen würde, was einer Ionisierungsspannung von 26 bis 29 Volt entspricht. Aston[1]) schließt aus Untersuchungen über die Verhältnisse im Kathodendunkelraum der Heliumentladung auf eine Ionisierungsspannung zwischen 25 und 30 Volt. Aus Cuthbertsons[2]) Untersuchungen über die Dispersion des Heliums ergibt sich eine Elektronenfrequenz, deren Umrechnung auf die Ionisierungsspannung durch die Quantenbeziehung 24,4 Volt ergeben würde. Eine interessante und wichtige Untersuchung von Rau[3]) über Lichterregung im Helium durch Kathodenstrahlen ergibt eine fernere indirekte Möglichkeit der Berechnung der Ionisierungsspannung. Rau beobachtete bei Anregung durch Kathodenstrahlen bei 75 bis 80 Volt das Auftreten der ersten Linie der Fowler-Serie, die dem Sprung eines Elektrons eines einfach positiv geladenen Heliumatoms aus einer dreiquantigen Bahn auf eine vierquantige entspricht. Es muß also durch Elektronenstöße von 75 bis 80 Voltstrahlen die Energie übertragen werden können, die genügt um ein Elektron ganz fortzunehmen und das zurückbleibende zweite Elektron auf eine vierquantige Bahn zu heben. Diesen letzteren Betrag kennt man wegen der Wasserstoffähnlichkeit des Heliumions, er beträgt 50,7 Volt, daher bleibt für die Ionisierungsspannung des Heliumatoms ein Betrag von 25 bis 30 Volt. Somit liefern alle bisher vorliegenden indirekten Methoden Werte, die zwar angenähert mit den theoretischen übereinstimmen; aber ihre Genauigkeit genügt nicht zu einer scharfen Prüfung der vorgeschlagenen Atommodelle, während die direkten Bestimmungen zwar genauer sind, aber offenbar nicht das Ionisationspotential, sondern das Resonanzpotential des Heliumatoms darstellen. Bei dieser Sachlage schien es uns wünschenswert, eine genaue Bestimmung des Resonanzpotentials und des Ionisationspotentials zur Abtrennung eines und beider Elektronen des Heliums vorzunehmen, um so den Energieaufwand kennen zu lernen, der zur vollständigen Zerlegung des Atoms in seine Bestandteile aufzuwenden ist. Nach Vor-

1) Wo keine weiteren Angaben gemacht sind, finden sich ausführliche Literaturangaben bei Franck und Hertz loc. cit.

1) Aston, Proc. Roy. Soc. 80, 45, 1908.
2) C. und M. Cuthbertson, Proc. Roy. Soc. 84, 13, 1910.
3) H. Rau, Sitz.-Ber. der Phys. Med. Ges. Würzburg, 26. Februar 1914.

liegen unserer Hauptresultate ist eine Arbeit von Frank Horton und Ann. Davies[1]) über die Ionisierungsspannung des Heliums erschienen, die uns erst nach Abschluß der Arbeit zugänglich wurde. Unsere Resultate sind mit denen

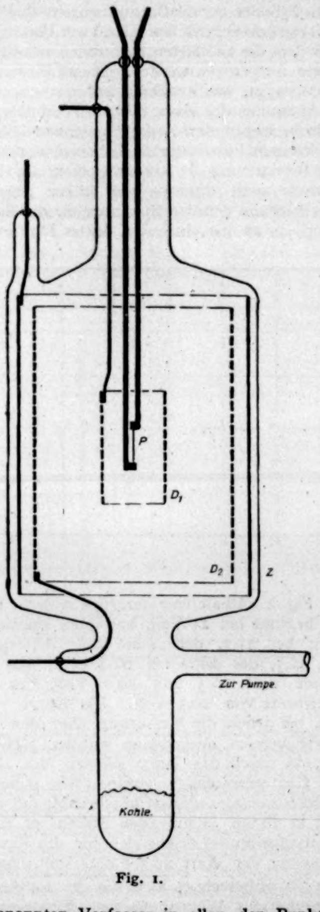


Fig. 1.

der genannten Verfasser in allen den Punkten, die sie untersucht haben, in guter Übereinstimmung, worauf weiter unten eingegangen wird.

Die Ausführung der Versuche wurde mit einer Anordnung durchgeführt, die in der Fig. 1 schematisch dargestellt ist.

Ein dünner Platindraht P wurde durch einen elektrischen Strom geglüht und diente als Elektronenquelle. Er war umgeben von zwei konaxial angeordneten Platindrahtnetzen D_1, D_2, die ihrerseits von einem Platinzylinder Z umschlossen wurden. Die Anordnung gleicht der früher von Franck und Hertz benutzten bis auf das zweite Drahtnetz, dessen Einführung nach dem Vorbild von Goucher und Davies geschah. Die Verwendung eines zweiten Netzes ergab für uns die Möglichkeit einer Benutzung einer größeren Zahl von neuen Schaltungen, so daß für jeden Elektronensprung die günstigsten Bedingungen erprobt werden konnten. Wir verzichten auf die Beschreibung unseres gesamten sehr großen Materials und geben hier nur die Methoden an, die uns als die besten erschienen sind.

Bestimmung der Resonanzspannung.

Bei der Bestimmung der Resonanzspannung konnten wir davon ausgehen, daß sie nahe bei dem von Franck und Hertz zuerst beobachteten Wert von 20,5 Volt liegen müsse. Eine möglichst genaue Bestimmung dieser Konstanten erschien uns deshalb besonders notwendig, da wir schon vor Erscheinen der Landéschen Arbeit von der Vermutung ausgingen, daß die bekannten Hauptserien des Heliums von zweiquantigen Bahnen ausgehen. Ist diese Anschauung richtig, so kann man aus der Resonanzspannung und der Grenze derjenigen Serie, die von dem durch die Resonanzspannung angeregten Helium ausgeht, die Ionisierungsspannung berechnen. Nun gibt es, wie hauptsächlich Paschen und Runge sowie Paschens Schüler gezeigt haben, zwei Seriensysteme des Heliums, die neuerdings noch von Stark[1]) ergänzt worden sind. Die Grenze der beobachteten Hauptserien dieser Systeme haben die Wellenlänge $\lambda = 2600$ Å und $\lambda = 3122$ Å, d. h. es müssen zwei Anfangsbahnen existieren, von denen das Elektron zum Sprung ins Unendliche, die Ionisierungsarbeit von 4,78, bzw. 3,98 Volt (aus der $h\nu$ Beziehung berechnet) benötigt. Folglich sollten auch 2 Resonanzspannungen existieren, die sich um 0,8 Volt unterscheiden sollten. Man muß also ein Verfahren zur Messung anwenden, bei dem man sicher ist, welche von den beiden möglichen Resonanzspannungen bei der Messung beobachtet wird. Die früheren Erfahrungen haben nun gezeigt, daß man bei relativ hohem Druck und kleinen Potentialgradienten in Edelgasen und Metalldämpfen immer den mit der

1) F. Horton und A. C. Davies, Proc. Roy. Soc. 95, 408—429, 1919.

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 56, 577, 1918.

kleinsten Energie auftretenden Elektronensprung durch das Einsetzen von unelastischen Elektronenstößen und Auftreten von Lichtemission nachweisen kann[1]). Mißt man also mit einem solchen Verfahren, dann muß man aus dem erhaltenen Wert durch Hinzuaddieren des aus der größeren Seriengrenze sich berechnenden Wertes von 4,78 Volt die Ionisierungsspannung erhalten. Zu den hier angegebenen Messungen wählten wir folgendes Schaltschema. Die Elektronen wurden zwischen dem Glühdraht, der die Elektronenquelle darstellt, und dem ersten Drahtnetz (D_1 der Figur) mit Spannungen beschleunigt, die durch Abzweigen von einem großen Widerstand in ganz kleinen Stufen variiert werden konnten. Zwischen das Drahtnetz D_1 und das Drahtnetz D_2 wurde ein schwaches (die Elektronen bremsendes) Gegenfeld gelegt, das durch Anlegen einer Potentialdifferenz von höchstens einigen Zehntel Volt erzeugt wurde. Zwischen das Drahtnetz D_2 und dem über ein Galvanometer zur Erde geleiteten Auffangezylinder Z wurde ein starkes Gegenfeld gelegt, das genügte, um alle Elektronen zur Umkehr zu bringen. (Das Verfahren gleicht dem Lenardschen zur Messung der Ionisierungsspannung mit dem Unterschied, daß die Elektronen auf einer langen Wegstrecke, wo sie sehr oft mit den Heliumatomen zusammenstoßen, nicht oder nur sehr wenig durch elektrische Felder abgebremst werden.) Evakuiert wurde bis zum Klebenbleiben des Quecksilbers an der Kappe der Kapillare des Mac Leod's mit der kombinierten Dampfstrahl-Diffusions-Quecksilberpumpe von Vollmer[2]), die sich sehr gut bewährte. Das Helium stand tagelang über gut ausgeglühter Kokosnußkohle in flüssiger Luft. Der Druck betrug bei diesen Messungen nie unter 1,5 mm Quecksilber. Die Messungen ergaben dann folgendes: Bei Vergrößerung der die Elektronen zwischen dem Glühdraht und dem Drahtnetz D_1 beschleunigten Spannung bis ca. 21 Volt gibt das Galvanometer keinen Ausschlag. Die Elektronen treten durch D_1 in den Raum zwischen den Drahtnetzen und dem Zylinder ein, stoßen elastisch mit den Heliumatomen zusammen und kehren durch das starke Gegenfeld wieder um. Bei ungefähr 21 Volt, je nach der Anfangsgeschwindigkeit der am Glühdraht ausgelösten Elektronen, sowie der Richtung des Potentialgefälles des den Glühdraht durchfließenden Heizstromes, setzt dann plötzlich ein Galvanometerausschlag ein, der bei einer Steigerung um wenige Hundertstel Volt vom Werte 0 bis zur Größe von ca. 10 cm anwächst. Er ist hervorgerufen durch das plötzliche Einsetzen der äußerst kurzwelligen Lichtstrahlung, die einerseits die Spuren der verunreinigenden Gase weitgehend ionisiert und das Wandern positiver Ionen zum Zylinder veranlaßt, andererseits durch einen starken lichtelektrischen Effekt am Platinzylinder, bei dem die gebildeten Elektronen von der Elektrode fortgezogen werden. Dieses Einsetzen des Stromes ist, wie erwähnt, äußerst scharf. Die Bestimmung des dazu nötigen Potentials genügt jedoch, wegen der Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen, Polarisationsschichten usw., noch nicht zur Bestimmung des Resonanzpotentials, vielmehr braucht man dazu — wie früher gezeigt — den Abstand von den Spannungen, die den Vorgang ein zweites, bzw. ein drittes Mal erzeugen.

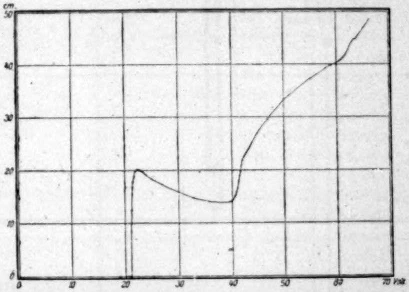


Fig. 2

Fig. 2 enthält eine derartige typische Kurve; sie beginnt bei 21 Volt, hat ihren steilsten Anstieg bei 21,2, der zweite steile Anstieg liegt bei 41,5, der dritte bei 62,2 Volt. Die Differenzen sind 20,3 und 20,7 Volt, mit einem Mittelwert von 20,5 Volt. Die Kurve ist wie alle, bei denen die Messungen über den ganzen Kurvenbereich ausgedehnt wurden, nicht sehr gut, da durch das lange Glühen des Drahtes das Gas verunreinigt wurde. Wir haben uns deshalb meistens darauf beschränkt, nur an den drei in Frage kommenden Stellen zu messen. Als Gesamtmittel ergibt sich für die Resonanzspannung der Wert 20,5 + 0,25 Volt. Aus diesem Wert berechnet sich die die Ionisierungsspannung zur Wegnahme eines Elektrons unter den oben ausgeführten Voraussetzungen zu 25,3 + 0,25 Volt. Es war noch zu beweisen, daß bei 20,5 Volt eine Lichtemission einsetzt. Dies wurde gezeigt durch die von Goucher und Davies angegebene Schaltweise, bei der sowohl die aus dem Gase kommenden Elek-

1) Die Erklärung hiervon siehe bei Franck und Hertz, loc. cit.

2) Die Pumpe wird in ausgezeichneter Ausführung von dem Glasbläser Hanff, Berlin NW., Luisenstraße 67 geliefert.

tronen wie auch die positiven Ionen durch Gegenfelder gehindert wurden, die Auffangeelektroden zu erreichen. Dann gelangt die lichtelektrische Emission allein zur Beobachtung. Es ergaben sich Kurven mit Knicken im richtigen Abstand von ca. 20,5 Volt, aber die Genauigkeit der Bestimmung ist der oben ausführlich beschriebenen unterlegen. Wir haben weitere Versuche ausgeführt über die Frage, ob noch eine zweite Resonanzspannung, die, wie oben angeführt wurde, um 0,8 Volt höher liegen müßte, vorliegt. In der Tat haben wir öfter in möglichst reinem Gas Andeutungen eines zweiten Maximums in erwartetem Abstand erhalten, wie z. B. aus den Kurven der Fig. 3 hervorgeht, welche die graphische Differentiation dreier Kurvenstücke in den betr. Bereichen darstellt. Das zweite Maximum ist bei 20 Volt ganz schwach sichtbar, bei 40 Volt schon deutlich und bei 60 Volt übersteigt es das erste.

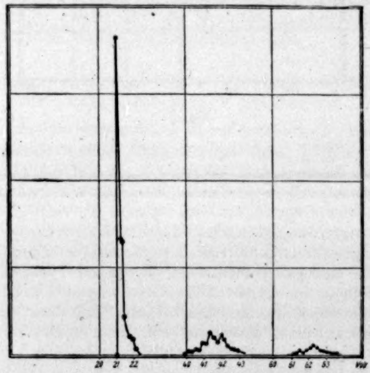


Fig. 3.

Gerade dies Verhalten spricht für die Realität der Erscheinung, da der mehr Energie verbrauchende Stoß bei den höheren Spannungen, die bei 40 und 60 Volt auf einem freien Wege durchlaufen werden, mit wachsender Wahrscheinlichkeit eintreten muß. In weniger reinem Gas laufen die Maxima ineinander und das ist auch der Grund, der die Genauigkeit unserer Messung auf den angegebenen Betrag beschränkte. Durch andere Schaltweise, bei der das auf einer freien Weglänge durchlaufene Potential größer ist und bei der zur Beobachtung die Zahl der Elektronen kam, die bestimmte Energieverluste beim Zusammenstoß erlitten hatten, gelang es uns manchmal das zweite Maximum deutlicher zu erhalten und sogar Anhaltspunkte für ein drittes Maximum, das auch theoretisch zu erwarten ist, zu finden. Das erste Glied der von der weiter innen gelegenen zweiquantigen Bahn ausgehenden Serie ist nämlich nach Paschen eine Resonanzlinie mit der Wellenlänge 1,08 μ, entsprechend 1,2 Volt, so daß ein dritter unelastischer Elektronenstoß bei einem um diesen Betrag höheren Potential zu erwarten ist. Wir hoffen, sobald wir flüssigen Wasserstoff zur Verfügung haben, die Beobachtung dieser Resonanzpotentiale sicherstellen zu können und wollen hier nur mit aller Reserve auf diesen Punkt hinweisen[1]). Die Klärung dieser Frage wird auch eine Heraufsetzung der Genauigkeit der Messungen der Ionisierungsspannungen erbringen.

Messung der Ionisierungsspannung zur Abspaltung eines Elektrons.

Bei der Messung der Ionisierungsspannung muß man, um den Beginn der Ionisation scharf nachweisen zu können, das Prinzip anwenden, dem Elektron auf einer oder wenigen freien Weglängen die Geschwindigkeit zu geben, die der angelegten Spannung entspricht und nachdem sie die Geschwindigkeit erreicht haben, muß man den Elektronen möglichst viel Gelegenheit zum Zusammenstoß mit Atomen geben, ehe sie durch elektrische Gegenfelder abgebremst werden. Wir erreichten das anfangs dadurch, daß wir bei hohem Druck (2 bis 3 mm) arbeiteten und dabei die Elektronenquelle, d. h. den Glühdraht so nahe wie möglich, bis auf ca. 1 mm Abstand, an das Netz heranbrachten. Dann erhalten bei $p = \sim 1$ mm die Elektronen ihre Geschwindigkeit auf zwei bis drei Weglängen, treten durch das Netz D_1 hindurch und können im Raum zwischen den Netzen mit Heliumatomen zusammenstoßen, die sie bei Überschreitung der Ionisierungsspannung zu ionisieren vermögen. Das Netz D_2 wurde mit dem Zylinder Z verbunden und gemeinschaftlich über das Galvanometer geerdet. Zwischen D_1 und D_2 lag ein so starkes Feld, daß die Elektronen nicht

1) Dieser Punkt, sowie überhaupt die interessante Tatsache, daß das erregte Helium, also das Helium im alkaliähnlichen Zustande, nach Paschen (Ann. d. Phys. **45**, 625, 1914) eine Resonanzemission zeigt, scheint uns einen Anhalt dafür zu bieten, daß der alkaliähnliche Zustand des Heliums gewissermaßen metastabil ist. Ein Elektron, das aus dieser Bahn in die nächste gehoben wird, kehrt immer wieder in diese zweiquantige Bahn zurück und springt niemals direkt in die einquantige stabile Bahn. Vielleicht hängt damit die merkwürdige Tatsache der starken Absorption von Helium (und auch den anderen Edelgasen) an zerstäubendem Metall in Geißler-Röhren zusammen. Man würde danach annehmen können, daß es im erregten Zustand absorbiert wird, und ehe es in den unerregten Zustand zurückkehrt, in welchem es vom Metall wieder freigegeben werden müßte, durch Fortschreiten der Zerstäubung von neuen Metallschichten bedeckt wird. Auch hierauf hoffen wir zurückkommen zu können.

bis zum Netz D_2 vordringen konnten. Man erhält dann Kurven, die von 20 Volt an einen sehr schwachen Strom anzeigen und bei ca. 25 Volt jäh in die Höhe gehen. Wir verließen dieses Verfahren, da bei ihm die Lage des Resonanzpotentials nicht genau genug ablesbar war und somit die Ionisierungsspannung selbst nur auf 1 Volt genau feststellbar war. Wesentlich genauere Resultate ergab das Schaltschema, das wir oben als das günstigste zur Messung des Resonanzpotentials beschrieben haben. Nur mußte man selbstverständlich wesentlich niedrigere Drucke anwenden, damit ein Teil der Elektronen bei der Resonanzspannung und ein Teil erst bei der Ionisierungsspannung unelastische Zusammenstöße erleiden konnte. Bei den benutzten Apparatdimensionen erreicht man diesen Zustand bei einem Druck von ca. 0,2 mm. Eine weitere Änderung der Schaltung gegen oben bestand darin, daß das zwischen den Drahtnetzen bestehende kleine Potentialgefälle eine Richtung erhielt, bei der die Elektronen zwischen den Netzen schwach weiter beschleunigt wurden. Zwischen D_2 und den Auffangezylinder wurde das starke Gegenfeld gelegt. Als Beispiel einer typischen Kurve dient Fig. 4.

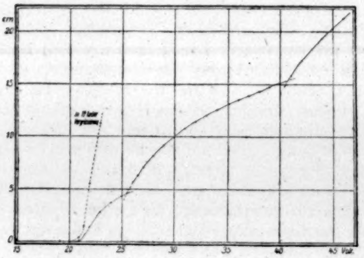


Fig. 4.

Der erste Galvanometerausschlag setzt bei 20,5 Volt ein; ein deutlicher Knick liegt bei 25,4 Volt und bei 41 Volt liegt der Knick, der dem doppelten Wert des Resonanzpotentials entspricht. Als Mittelwert der Beobachtungen ergibt sich für die Ionisierungsspannung

25,4 Volt ± 0,25 Volt;

und für die Resonanzspannung wieder der Wert 20,5 Volt. (Hier müssen wir zur Bestimmung des Resonanzpotentials den Beginn der Anstiege nehmen, weil wir bei so kleinen Drucken arbeiten, daß nicht nur der erste, sondern alle Sprünge auftreten können.) Eine weitere Bestimmung der Ionisierungsspannung führten wir aus durch Nachweis des unelastischen Stoßes der Elektronen bei ca. 25 Volt. Sie wurde gewonnen durch Untersuchung der Zahl von Elektronen, die nach dem Zusammenstoß mit *He*-Atomen noch gegen ein Gegenfeld von einigen Volt anlaufen können. In diesen Kurven muß sich der unelastische Stoß sowohl beim Resonanzpotential wie beim Ionisierungspotential durch eine Abnahme der die Elektrode erreichenden Elektronen bei der betreffenden Spannung dokumentieren.

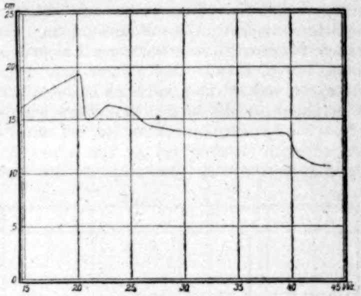


Fig. 5.

Fig. 5 zeigt ein Beispiel solcher Kurven. Bei ihnen ist nur Wert zu legen auf die nach abwärts zeigenden Knicke, sie liegen wie erwartet in der Gegend von 20, 25 und 40 Volt. Die übrigen Singularitäten erklären sich auch aus dem angewandten Schaltverfahren, worauf hier ausführlich einzugehen nicht nötig ist, da das Verfahren nicht zu quantitativen Messungen benutzt wurde. Interessant ist der verschiedene Charakter der Knicke beim Resonanz- und beim Ionisationspotential, er ist wohl dadurch bedingt, daß bei ersterem nur Energieverluste von $h\nu_r$ auftreten, bei der Ionisation aber der Energieverlust $h\nu_\infty$ oder größere Energieverluste, in Analogie an das kontinuierliche Absorptionspektrum, das sich dem Serienende anschließt. Der somit erhaltene Wert für die Ionisierungsspannung spricht eindeutig für die Berechtigung der oben gemachten Annahme; die Differenz zwischen Messung und Berechnung von 0,1 Volt liegt durchaus innerhalb der Fehlergrenze, dagegen stimmt der erhaltene Wert nicht mit dem von Bohr und dem von Landé berechneten überein, von denen er um 3 bis 4 Volt abweicht. Man könnte nun meinen, daß trotz der vorher ausgeführten Übereinstimmung mit dem aus den Serienenden und dem Resonanzpotential berechneten Wert bei 25,4 Volt nicht die wirkliche Ionisation, sondern ein anderer Elektronensprung, etwa zu einer dreiquantigen Bahn,

einsetzt und an diesen erst die bekannten Heliumserien anschließen, so daß die wahre Ionisierungsspannung oberhalb 29 Volt liegen würde. Das ist nach dem oben angeführten äußerst unwahrscheinlich und es wird es noch mehr, wenn man bedenkt, daß man sonst sicher bei dem spektral gut durchforschten Helium irgendwelche Linien der Serie mit der Grenze von ca. 9 Volt, deren Anfangslinien in der Gegend von 1800 Å bis 2500 Å liegen müßten, hätte finden müssen. Hinzu kommt, daß wir eine Lichtemission durch den Photoeffekt in dieser Gegend nicht gefunden haben. Wir glaubten jedoch möglichst jeden Zweifel ausschließen zu sollen, indem wir noch die Ionisierungsspannung bestimmten, die gebraucht wird, um dem Heliumatom beide Elektronen auf einmal fortzunehmen, woraus man dann, wie bei der Diskussion des Rauschen Wertes ausgeführt wurde, durch Abziehen der Ionisierungsarbeit für das wasserstoffähnliche einfach geladene Heliumatom, die 54,08 Volt beträgt, wieder auf die Ionisierungsarbeit des normalen Heliumatoms kommen muß.

Bestimmung der Ionisierungsspannung zur Fortnahme beider Elektronen.

Bei der Bestimmung dieser Größe muß man, wenn man nach dem gewöhnlichen Verfahren arbeitet, sehr sauberes Gas verwenden, da bei der hohen Elektronengeschwindigkeit alle Verunreinigungen so weit ionisiert werden, daß der gesuchte Effekt überdeckt wird. Aus dem gleichen Grunde muß der Druck niedrig gewählt werden. Die besten Resultate ergab ein Druck von 0,1 mm Quecksilber. Die Schaltung war die des ersten oben geschilderten Verfahrens zur Messung der gewöhnlichen Ionisierungsspannung, nur war der Glühdraht zentrisch angebracht. Zur Ausschaltung der durch Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen bedingten Ungenauigkeiten mußte in der Kurve wieder der Sprung des Resonanzpotentials erscheinen. Da das Gas sauber gehalten werden mußte, überzeugten wir uns nur durch Kontrollmessungen der ganzen Kurve, daß keine weiteren Knicke als die gesuchten auftraten, beschränkten uns jedoch bei den genauen Messungen nur auf die Untersuchung der beiden uns hier interessierenden Knicke.

Fig. 6 stellt die Kurven dar, aus denen man die Art der Stromänderung in der Gegend der gesuchten Ionisierungsspannung ersehen kann. Die erhaltenen Werte liegen bei 79,5 Volt. Naturgemäß sind die hier auftretenden Knicke nicht sehr intensiv, da bei der hohen Spannung das Helium selbst, besonders aber jede Verunreinigung schon stark ionisiert wird. Um so wichtiger war es, festzustellen, daß der Knick nicht die vierte

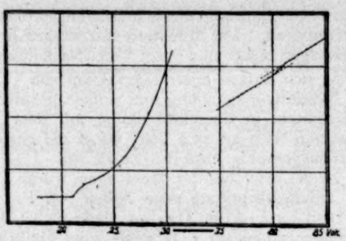


Fig. 6.

Wiederholung des Resonanzpotentials, die bei angenähert gleichen Werten der Spannung liegt, darstellt. Wir überzeugten uns davon dadurch, daß wir zeigen konnten, daß die dritte Wiederholung des Resonanzpotentials in der Gegend von 60 Volt bei den vorliegenden Verhältnissen überhaupt nicht mehr in Erscheinung trat, um so weniger konnte es natürlich die vierte Wiederholung der Resonanzspannung tun. Bei etwas unsauberem Gas, wie es durch längeres Glühen des Platindrahtes entsteht, wird der Knick undeutlicher, ohne seine Lage relativ zum Resonanzpotential zu verändern. Manchmal gelingt es bei einem gewissen Grad der Verunreinigung, ihn als Knick der Kurve nach unten hin zu erhalten. Ein Beispiel dafür gibt Fig. 7.

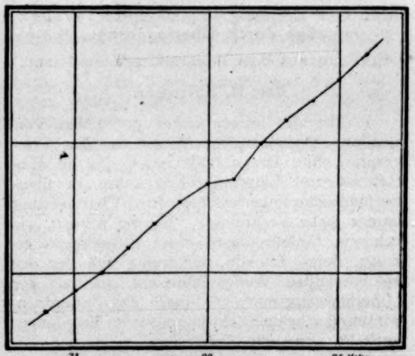


Fig. 7.

Die Deutung der Erscheinung liegt darin, daß der Elektronenstoß bei 80 Volt schon eine Reihe von Ionenpaaren aus den Verunreinigungen liefern kann, während beim Helium die ganze Energie eines 80 Voltstrahls für einen Atomprozeß verbraucht wird. Hierdurch wird der reguläre Anstieg der

Kurve beim Einsetzen dieses Ionisierungsprozesses unterbrochen. Der Mittelwert der ausgeführten Messungen ergab 79,5 ± 0,3 Volt. Nach Obigem ergibt sich daraus durch Subtraktion von 54,08 die Ionisierungsspannung zum einfach geladenen Heliumatom in Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert zu 25,4 Volt, wobei die genaue Übereinstimmung natürlich Zufall ist.

Nach Abschluß der Messungen wurde uns die anfangs erwähnte neue Arbeit von Frank Horton und Ann. Davies zugänglich. Die Verfasser arbeiteten z. T. nach ganz ähnlichen Methoden wie wir. Sie erhalten als Resonanzspannung 20,4 und als Ionisierungsspannung 25,7 Volt, was mit unseren Messungen in erfreulicher Übereinstimmung ist. Als Gesamtresultat folgt, daß das Helium merklich weniger stabil ist, als nach den Atommodellen von Bohr und Landé zu erwarten war.

Ein Teil der verwandten Apparate war aus Mitteln der Jagorstiftung angeschafft, welche einem von uns vor dem Kriege freundlichst zur Verfügung gestellt waren. Wir haben dafür bestens zu danken.

Berlin-Dahlem, Juni 1919. Physikalische Abteilung des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Physik. Chemie und Elektrochemie.

(Eingegangen 26. Juni 1919.)

Über den Empfang ungedämpfter Wellenzüge durch Überlagerung.

(Mitteilung aus dem Telegraphen-Versuchsamt.)

Von H. Salinger.

1. Mit der immer weiter greifenden Verwendung ungedämpfter Wellen in der Telegraphie ohne Draht findet auch das an Einfachheit und Empfindlichkeit kaum zu übertreffende Empfangsverfahren durch Überlagerung immer mehr Verbreitung. Hierbei werden, wie bekannt, Schwingungen eines Hilfssenders erzeugt, deren Periode nur wenig von der der ankommenden Wellen abweicht, so daß der „Überlagerungston", der durch das Zusammenwirken der beiden Schwingungen im Empfänger entsteht, akustisch hörbar ist.

Dagegen ist dieses Verfahren, wie hier auseinandergesetzt werden soll, nicht dazu geeignet, in einer auftreffenden Welle von zusammengesetzter Schwingungsform die einzelnen Oberschwingungen nachzuweisen; es kann nämlich ein hörbarer Überlagerungston auch dann zustandekommen, wenn die Welle des Hilfssenders wesentlich von der aufzunehmenden Welle abweicht. Die im folgenden dargelegten Beobachtungen und Überlegungen ergaben sich bei den hier ausgeführten Versuchen über Mehrfachtelephonie auf Leitungen mittels Hochfrequenz[1]); es ist klar, daß in diesem Falle, wo mehrere Sender auf eine Leitung, also auf die gleiche Antenne, arbeiten, die Überlagerungseffekte sich besonders stark bemerkbar machen, und zwar in störendem Sinne.

2. Die häufig gebrauchten Bezeichnungen „Schwebungs"- oder „Interferenzempfang" dürfen nicht darüber hinwegtäuschen, daß das eigentliche akustische Analogon dieses Vorganges in den Kombinationstönen zu suchen ist, insbesondere in den von Schaefer[2]) und Waetzmann[3]) untersuchten Mikrophontelephontönen, deren Theorie sich völlig auf unseren Fall übertragen läßt.

Sei $i = f(e)$ die Charakteristik des im Empfänger benutzten Detektors, etwa eines Audions. (In diesem Falle bedeutet e die Gitterspannung, i den Anodenstrom.) Wir entwickeln[4]) sie in der Form

$$i = i_0 + i_1 e + i_2 e^2 + i_3 e^3 + \cdots. \qquad (1)$$

Auf den Empfänger treffen die Schwingungen zweier Sender, so daß wir die Spannung am Detektor in der Form

$$e = \sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t \qquad (2)$$

ansetzen können, wobei wir von den Phasen und Amplituden, die uns nicht weiter interessieren, absehen.

Setzen wir nun (2) in (1) ein, so erhalten wir unter anderem die Glieder

$$2 i_2 \sin \omega_1 t \cdot \sin \omega_2 t,\ \ 3 i_3 \sin^2 \omega_1 t \cdot \sin \omega_2 t, \cdots\cdot$$

$$\binom{n+m}{m} i_{n+m} \sin^m \omega_1 t \cdot \sin^n \omega_2 t.$$

Der erste dieser Ausdrücke gibt umgeformt

$$i_2 [\cos (\omega_1 - \omega_2) t - \cos (\omega_1 + \omega_2) t];$$

das sind also zwei Schwingungen, von denen die erste möglicherweise akustisch hörbar sein wird und dann als Differenzton bezeichnet werden kann.

Das mit i_3 multiplizierte Produkt liefert eine Schwingung von der Kreisfrequenz $2\omega_1 - \omega_2$, und allgemein bekommen wir die Töne $m\omega_1 - n\omega_2$, die wir in Anlehnung an die in der Akustik übliche Bezeichnung als Kombinationstöne $(m + n - 1)$ ter Ordnung bezeichnen; sie treten nicht auf, wenn die Entwicklung (1) vor dem Glied $i_{m+n} e^{m+n}$ abbricht.

1) Vgl. K. W. Wagner, „Vielfachtelephonie und -telegraphie mittels schneller Wechselströme", Elektrot. Zeitschrift 40, 383 u. 394, 1919.

2) K. L. Schaefer, Ann. d. Phys. 17, 572, 1905.

3) E. Waetzmann, Ann. d. Phys. 42, 729, 1913.

4) Diese Rechnung findet sich auch bei Liebowitz, Jahrb. f. drahtl. Telegr. u. Teleph. 12, 451, 1918.

3. Wählt man ω_1 und ω_2 beliebig, so werden sich doch im allgemeinen die ganzen Zahlen m und n so bestimmen lassen, daß der Ton $m\omega_1 - n\omega_2$ in den Bereich akustischer Hörbarkeit fällt; ob er nun wirklich gehört wird, hängt offenbar von der Form der Detektorcharakteristik ab. Bricht diese z. B. mit dem Glied $i_2 e^2$ ab, so kann nur der gewöhnliche Differenzton auftreten; hat diese Kurve andererseits einen plötzlichen Knick, wie gewöhnlich die des Audions, so können sogar die Kombinationstöne recht hoher Ordnungen hörbar sein; natürlich spielt auch die Intensität der ankommenden Wellen eine große Rolle.

Fehlerhaft wäre es dagegen, wenn beispielsweise der Ton $2\omega_1 - \omega_2$ festgestellt wird, daraus auf das Vorhandensein des Obertons $2\omega_1$ in der einen der auf den Detektor wirkenden Schwingungen zu schließen; der Ansatz (2) nimmt vielmehr die beiden auftreffenden Wellen als frei von Oberschwingungen an, und ergibt dennoch Kombinationstöne aller Ordnungen. Die Verwendung des Überlagerers zur Untersuchung der Schwingungsform eines Senders ist daher nur bei Anwendung großer Vorsicht gestattet.

4. Bei der großen Empfindlichkeit des Überlagerungsempfanges spielen nicht nur die allerersten Glieder der Entwicklung (1), sondern oft auch die späteren eine Rolle und geben Anlaß zum Auftreten der entsprechenden Kombinationstöne. Diese sind also hier weit besser zu beobachten als selbst in der Akustik, gerade deshalb, weil die Grundwellen selbst nicht hörbar sind. Es scheint überhaupt, daß die Akustik aus der Beschäftigung mit ungedämpften elektrischen Schwingungen, deren Erzeugung jetzt so sehr bequem geworden ist, Vorteil ziehen könnte. Natürlich erhält man auf dem angegebenen Wege nur die Differenz-, nicht die Summationstöne.

Zur Erläuterung des Gesagten möge ein Versuch mitgeteilt werden. Der Sender 1 wurde an das ferne Ende einer 300 km langen Freileitung angeschlossen, an deren diesseitigem Ende sich ein Audionempfänger mit Verstärker befand; ihm war eine Siebkette[1]) vorgeschaltet, die nur einen schmalen Bereich von Frequenzen in der Nähe der Grundfrequenz des Senders 1 (Wellenlänge $\lambda_1 = 8750$ m) durchließ. 10 m vom Empfänger entfernt stand der Sender 2, der auf eine künstliche Antenne arbeitete und nur durch seine Strahlung, die natürlich nicht frei von Oberwellen war, auf den Empfänger wirkte.

1) K. W. Wagner, Spulen- und Kondensatorleitungen, Archiv f. Elektrotechnik 8, 61, 1919.

Zunächst wurde die Siebkette auf die Grundwelle des Senders 1 eingestellt und darauf dieser Sender verstimmt, so daß er jetzt die Welle 9350 m gab; der Sender 2 wurde auf $\lambda = 9000$ m eingestellt. Dann war im Empfänger kein Überlagerungston hörbar; dieser trat aber sofort wieder auf, wenn einige Glieder der Siebkette ausgeschaltet wurden. Daraus folgt, daß die Siebkette eine um 600 m von ihrer Grundwelle abweichende Schwingung schon so stark abdrosselte, daß sie nicht mehr durch Überlagerung nachweisbar war. A fortiori mußte sie also die Oberwellen des Senders 1 abhalten, und wir können daher die auf den Empfänger auftreffende Schwingung der Frequenz ω_1 als rein sinusförmig voraussetzen.

Nun wurde Sender 1 auf $\lambda_1 = 8675$ m eingestellt und λ_2 zwischen 1200 und 11000 m variiert; dabei fanden sich die in der folgenden Tabelle angegebenen „Interferenzgebiete", in denen ein Überlagerungston $m\omega_1 - n\omega_2$ wahrnehmbar war; die Tabelle enthält auch die Zahlen m und n.

λ_2	m	n
von 1675 bis 1750 m	5	1
„ 2060 „ 2190 „	4	1
„ 2750 „ 3000 „	3	1
„ 3900 „ 4600 „	2	1
„ 7500 „ 10400 „	1	1

In diesem Falle traten also Kombinationstöne bis zur 5. Ordnung auf; gelegentlich sind auch noch höhere Ordnungen wahrgenommen worden[1]).

5. Neue Erscheinungen erhält man, wenn gleichzeitig drei Schwingungen auf den Empfänger wirken. Setzt man an Stelle der Beziehung (2)

$$e = \sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t + \sin \omega_3 t, \qquad (2')$$

so erkennt man leicht das Auftreten der Kombinationstöne $\pm m\omega_1 \pm n\omega_2 \pm p\omega_3$. Der einfachste dieser Töne hat eine Kreisfrequenz der Form $\omega_1 + \omega_2 - \omega_3$, er entsteht aus dem Glied $i_3 e^3$ der Reihe (1). Es kann dann der Fall eintreten, daß die Sender 1 und 2 keinen hörbaren Ton im Empfänger erzeugen, ebensowenig 2 und 3 oder 1 und 3, wohl aber die drei Sender 1, 2 und 3 gemeinschaftlich.

Auch diese Folgerung ließ sich durch den Versuch bestätigen; die entsprechenden Zahlen waren

$$\lambda_1 = 8050 \text{ m}, \quad \lambda_2 = 6200 \text{ m}, \quad \lambda_3 = 3325 \text{ m}.$$

Die Schwingungen 1 und 2 wurden durch Fernempfang über die Leitung aufgenommen; der

1) Oberwellen des Senders 2 konnten den Versuch nicht gefälscht haben, da stets $n = 1$ war.

Sender 3 stand wieder in der Nähe des Empfängers und wirkte durch Strahlung.

(Eingegangen 18. Juni 1919.)

Zum experimentellen Nachweis der Ampèreschen Molekularströme.

Von Emil Beck.

Nach der Ampèreschen Hypothese über die Natur des Magnetismus werden die magnetischen Erscheinungen hervorgerufen durch elektrische Ströme, welche die Moleküle der magnetisierbaren Körper umkreisen, indem die Anordnung der Ebenen der Strombahnen den Grad der Magnetisierung bestimmt. Ist der Körper in unmagnetischem Zustand, so sind jene Strombahnebenen der einzelnen Moleküle regellos gerichtet, während durch ein magnetisches Feld alle Ebenen mehr oder weniger gleich gerichtet werden. Der Elektronentheorie des Magnetismus liegt dieselbe Anschauung zugrunde; die Molekularströme werden hier gebildet von rotierenden elektrischen Teilchen, die an träge Masse gebunden sind. Dann aber verhält sich ein magnetisches Molekül wie ein Kreisel und muß die bekannten Trägheitserscheinungen der Kreisel zeigen. So ergeben sich aus den Gesetzen der Mechanik die beiden folgenden wichtigen Tatsachen: Jede Bewegungsänderung eines magnetischen Körpers muß eine Magnetisierungsänderung und jede Magnetisierungsänderung eine Bewegungsänderung des Körpers zur Folge haben.

Damit bietet sich aber die Möglichkeit einer experimentellen Prüfung der Ampèreschen bzw. Elektronen-Theorie des Magnetismus, zumal da das einem Molekularmagneten wegen der Rotation der elektrischen Teilchen innewohnende Impulsmoment leicht berechnet werden kann. Bezeichnet man dasselbe mit J, ist ferner e die Ladung, m die Masse jedes der kreisenden elektrischen Teilchen und M das Moment des Molekularmagneten, so ist:

$$\frac{J}{M} = 2\frac{m}{e},$$

also eine konstante, von der Natur der Substanz unabhängige Größe. Unter der Annahme, daß nur negative Teilchen, Elektronen, kreisen, ist:

$$2\frac{m}{e} = 1{,}13 \cdot 10^{-7}$$

elektromagnetische Einheiten. Jede Magnetisierungsänderung eines magnetischen Körpers muß nun, weil sie die Rotationsachsenrichtung der einzelnen Kreisel und damit das Impulsmoment derselben ändert, ein grob mechanisches Impulsmoment am Körper zur Folge haben nach dem Satz von der Erhaltung des Impulsmoments. Das dabei entstehende Drehmoment ist gegeben durch die Vektorgleichung:

$$D = 2\frac{m}{e}\frac{dI}{dt}, \qquad (1)$$

wenn I die Magnetisierungsintensität des Körpers bedeutet.

Auf Grund obiger Überlegungen haben 1915 A. Einstein und W. J. de Haas[1]) experimentelle Untersuchungen angestellt, um jenes innere Impulsmoment der magnetischen Moleküle nachzuweisen, indem sie die Bewegungen beobachteten, die ein magnetischer Körper unter Einfluß von Magnetisierungsänderungen annahm. Ein weiches Eisenstäbchen wurde an einem Glasfaden axial in eine Spule gehängt, in der ein starkes Magnetfeld erzeugt werden konnte, wodurch das Stäbchen nahezu gesättigt wurde. Kommutierte man plötzlich den Strom, so mußte nach Gleichung (1) ein axiales Drehmoment auftreten, welches das Stäbchen in Schwingungen versetzte. Um störende Effekte zu vermeiden und den zu beobachtenden Effekt zu multiplizieren, haben die Verfasser ein Wechselfeld von der Frequenz eines gewöhnlichen Wechselstroms angewendet und die Aufhängung des Stäbchens so gewählt, daß die Eigenschwingung des Stäbchens dieselbe Frequenz hatte wie der Wechselstrom. Dadurch konnte Resonanz der Stäbchenschwingungen erzielt werden. Die erwarteten Schwingungen sind nun in der Tat von den Verfassern beobachtet worden, und zwar ergab sich auch quantitativ der Effekt — den ich gerne, nach dem Vorschlag von de Haas, als Einsteineffekt bezeichnen will — in ausgezeichneter Übereinstimmung mit der Theorie. Es wurde nicht nur die Resonanzamplitude beobachtet, sondern die ganze Resonanzkurve aufgenommen; die nach einer relativ einfachen Formel daraus berechnete Größe $2\frac{m}{e}$ ergab sich zu $1{,}11 \cdot 10^{-7}$, also bis auf 2 Proz. genau gleich dem Werte der Elektronenkonstante.

Einstein und de Haas bemerken in ihrer Arbeit, daß sich ihre Methode zu einer genauen Bestimmung der wichtigen Größe $\frac{m}{e}$ werde ausbilden lassen. Dieser Umstand veranlaßte mich nun, die Messungen von mir aus nach derselben Methode zu wiederholen und durch einige Abänderungen und Erweiterungen den Genauigkeitsgrad der Methode zu erhöhen. Diese Änderungen beziehen sich hauptsächlich

1) A. Einstein u. W. J. de Haas, Verh. d. D. Phys. Ges. 17, 152—170, 1915.

auf die Aufnahme der Resonanzkurve, die mit Hilfe eines Frequenzmessers geschah, der speziell zu diesem Zweck konstruiert worden ist und sehr kleine Frequenzdifferenzen zu messen gestattete; ferner auf die Art der Montierung des zu untersuchenden magnetisierten Stäbchens, indem es auch in eingespannter (nicht nur aufgehängter) Lage untersucht wurde. Auch wurde außer zwei Eisenstäbchen noch ein Nickelstäbchen untersucht. Den unvermeidlichen störenden Effekten wurde die größte Aufmerksamkeit geschenkt. Die Methode wurde noch in einer zweiten Form ausgeführt, welche die Aufnahme der Resonanzkurve vermeidet. Es wurde ferner der Nachweis erbracht, daß es wirklich negative Teilchen sind, die die Molekularströme bilden.

Auch meine Messungen haben einwandfrei den Einsteineffekt ergeben, doch in einer Größe, die ganz wesentlich von dem theoretisch zu erwartenden Wert, also dem von Einstein und de Haas gefundenen, abweicht. Die Größe $\frac{m}{e}$ ergab sich nämlich bei Eisen um 47 Proz. zu klein und bei Nickel um 43 Proz. zu klein; um soviel wäre also das Impulsmoment der magnetischen Moleküle kleiner als man erwarten müßte, wenn man annimmt, daß nur Elektronen von den bekannten Größenverhältnissen in den Molekülen kreisen.

Damit ist kurz der Inhalt und das Resultat meiner Arbeit angegeben, die in den Annalen der Physik erscheint; dort sind die von mir ausgeführten Messungen ausführlich beschrieben.

Zürich, Juli 1919.

(Eingegangen 19. Juli 1919.)

Eine mechanische Theorie der Serienspektra.

Von A. Korn.

I.

Die Grundlagen.

Die Kenntnis meiner mechanischen Theorie des elektromagnetischen Feldes[1]) sei hier nicht vorausgesetzt, doch ist zu bemerken, daß erst durch die Hinzunahme derselben die hier auseinanderzusetzende Theorie der Serienspektra zu einer wirklich mechanischen Theorie wird, d. h. zu einer Zurückführung der zu erklärenden Erscheinungen auf ein einheitliches mechanisches Grundgesetz.

Die Grundanschauung der elektromagnetischen Lichttheorie wird adoptiert, daß als Ursache der Lichterscheinungen ein elektromagnetisches Feld angesehen wird, hervorgerufen durch mechanische Schwingungen elektrischer Teilchen, wobei die Schwingungsdauern in den Grenzen liegen sollen, welche man als die Grenzen des sichtbaren Spektrums bezeichnet. Wer eine wirklich mechanische Theorie wünscht, wird dabei noch die mechanische Natur der elektrischen Teilchen und des durch ihre Bewegung hervorgerufenen elektromagnetischen Feldes zu ergründen haben und kann hierzu meine mechanische Theorie des elektromagnetischen Feldes zu Hilfe nehmen. Wer dies nicht wünscht, möge die hier auseinanderzusetzende Theorie als eine Ergänzung der elektromagnetischen Theorie des Lichtes betrachten.

Die Quantentheorie wird nicht als Hilfsmittel herangezogen, doch ergibt sich, daß viele wichtige Untersuchungen, welche sich an die Quantentheorie der Spektra [ausgehend von den Bohrschen[1]) Ideen] angeschlossen haben, in die hier auseinanderzusetzende Theorie eingeordnet werden können.

Während in den bisherigen mechanischen Spektraltheorien, welche die Spektra als Eigenschwingungen elastischer Systeme darstellen wollen [ich denke hier im besonderen an die Theorien von Ritz[2]) und Lindemann[3])], der Weg eingeschlagen wurde, die Differentialgleichungen der Eigenschwingungen eines geeignet gewählten elastischen Systems aufzustellen, von solcher Art, daß die Eigenfrequenzen den Formeln von Balmer, allgemeiner Formeln, wie denen von Kayser und Runge, für die Frequenzen der Spektrallinien entsprechen, bin ich in folgender Weise vorgegangen:

Ich betrachte, wie in der klassischen Mechanik, zwei Massenteilchen m_0 und m, der Einfachheit halber zunächst kugelförmig, deren Radien gegen die Zentraldistanz r klein sein mögen; das Teilchen m_0 möge auf das Teilchen m in der Richtung

Zentrum von m_0 $\longrightarrow$ Zentrum von m

eine Kraft $f(r)$ ausüben, welche als eine gewisse Funktion der Zentraldistanz gedacht ist und — das ist für eine mechanische Theorie unerläßlich — mit Hilfe von Schwingungen der Teilchen und eines Zwischenmediums zu er-

1) A. Korn, Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes I—XII. Diese Zeitschr. 18, 323, 341, 504, 539, 581, 1917; 19, 10, 201, 234, 327, 363, 426, 1918; 20, 58, 85, 1919.

1) N. Bohr, Phil. Mag. (6) 27, 1, 476, 857, 1913.

2) W. Ritz, Diss. Göttingen 1903; diese Zeitschr. 4, 406, 1903; Ann. d. Phys. (Drudes) 12, 264, 1903.

3) F. Lindemann, Münchn. Ber. 31, 441, 1901; 33, 27, 1903.

klären ist. Wir können, das ist augenscheinlich und kann durch zahlreiche Beispiele belegt werden[1]), die Funktion $f(r)$ so wählen, daß bei der Bewegung der Massenteilchen

$$r = r_0 + \varepsilon(t) \cos \frac{t}{T} 2\pi \tag{1}$$

ist, wo r_0 eine konstante Entfernung, T eine konstante kleine Zeitdauer und die Funktion $\varepsilon(t)$ der Zeit t eine kleine Entfernung darstellen soll, welche gegen r_0 klein ist. Der Einfachheit halber sei m_0 als ruhend gedacht. Das Teilchen m hat dann eine schwingende Zentraldistanz (mit der Schwingungsdauer T) von dem ruhenden Teilchen m_0, wenn wir noch voraussetzen, daß die Differentialquotienten $\varepsilon'(t)$ gegen die maximalen Geschwindigkeiten des Teilchens m außerordentlich klein sind.

Ist m ein elektrisches Teilchen und T eine Schwingungsdauer innerhalb des sichtbaren Spektrums, so könnte ein solches System Lichtschwingungen von der Schwingungsdauer T aussenden. Ich habe mir nun die Frage gestellt, ob es nicht möglich ist, eine Funktion $f(r)$ so zu finden, daß bei einem solchen Wechselwirkungsgesetz eine Vielheit von Bewegungen

$$r = r_{jo} + \varepsilon_j(t) \cos \frac{t}{T_j} 2\pi, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

möglich ist, wobei die T_j, etwa in der Art

$$T_1 > T_2 > \ldots$$

geordnet, Schwingungsdauern sind, wie sie einer Spektralserie zugehören. In der Tat habe ich durch meine Bemühungen in dieser Richtung gefunden, daß die folgende Funktion[2])

$$\left.\begin{aligned} f(r) &= F'(r), \\ F(r) &= \left(\alpha + \frac{\beta}{r^2}\right) \cos \frac{r}{\lambda} 2\pi + \frac{2\pi}{3\lambda} \frac{\gamma}{r^3} \sin \frac{r}{\lambda} 2\pi, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

in welcher α, β, γ, λ Konstanten sind, den gestellten Anforderungen entspricht. Dies soll zunächst in dieser ersten Abhandlung gezeigt werden, während die Zurückführung des Wechselwirkungsgesetzes auf Schwingungen der Teilchen in einem Zwischenmedium, zusammen mit weiteren Folgerungen aus diesen Vorstellungen, Gegenstand späterer Ausführungen sein wird.

1) Ein Beispiel wird durch zwei Himmelskörper gegeben, welche sich nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, wenn zu irgendeiner Anfangszeit die Bedingungen derart sind, daß m eine nahezu kreisförmige Bahn um m_0 beschreibt. Es lassen sich auch einfache Beispiele angeben, bei denen sich m gegen m_0 nur in der Richtung der Zentraldistanz bzw. in der entgegengesetzten Richtung bewegt.

2) Dieselbe ist explizite:

$$f(r) = \left\{-2\beta + \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \gamma\right\} \frac{1}{r^3} \cos \frac{r}{\lambda} 2\pi - \\ - \frac{2\pi}{\lambda}\left(\alpha + \frac{\beta}{r^2} + \frac{\gamma}{r^4}\right) \sin \frac{r}{\lambda} 2\pi. \tag{3'}$$

Seien x, y, z die Koordinaten des Zentrums von m, dann sind die Bewegungsgleichungen dieses Teilchens (das Zentrum von m_0 wird als Anfangspunkt des Koordinatensystems genommen):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f(r) \frac{x}{r}, \ldots, \tag{4}$$

mit den beiden bekannten Integralen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} m \left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right\} &= F(r) + c_1, \\ r^2 \frac{d\omega}{dt} &= c_2, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

bei Einführung der Polarkoordinaten (r, ω) durch die Transformation:

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos \omega, \\ y &= r \sin \omega \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

und Verlegung der Ebene, in welcher die Bahn des Teilchens m stets bleiben muß, in die Ebene $z = 0$; c_1 und c_2 sind Integrationskonstanten.

Durch Elimination von $\frac{d\omega}{dt}$ aus (5) ergibt sich:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c_1 + F(r) - \frac{1}{2} \frac{m c_2^2}{r^2}, \tag{7}$$

und hieraus durch Differentiation nach t:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{m} f(r) + \frac{c_2^2}{r^3}. \tag{8}$$

Diese beiden Gleichungen kommen hauptsächlich für uns in Betracht. Wir setzen:

$$r_{jo} = j\lambda, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

so daß für $r = r_{jo}$ $(j = 1, 2, \ldots)$:

$$\sin \frac{r}{\lambda} 2\pi = 0, \quad \cos \frac{r}{\lambda} 2\pi = 1,$$

und daher:

$$\frac{1}{m} f(r) + \frac{c_2^2}{r^3} = 0,$$

wenn die Konstanten die Beziehung erfüllen:

$$m c_2^2 = 2\beta - \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \gamma. \tag{10}$$

Sei nun δ_j[1]) eine genügend kleine Länge, so ergibt sich für eine Bewegung, welche in den Grenzen:

$$-\delta_j \overline{\overline{<}} \varrho_j = r - r_{jo} \overline{\overline{<}} + \delta_j \tag{11}$$

stattfindet, nach (8) in erster Annäherung die Gleichung:

$$\frac{d^2 \varrho_j}{dt^2} = -\left(\frac{3 c_2^2}{r_{jo}^4} - \frac{1}{m} f'(r_{jo})\right) \varrho_j. \tag{12}$$

1) Die Hinzufügung des Index j zu δ soll andeuten, daß diese kleine Größe für jedes j einen anderen Wert haben kann.

Die Gleichung (7) gestattet ohne Schwierigkeit den Nachweis, daß für irgendein j bei geeigneter Wahl der Konstanten eine Bewegung für alle Zeit zwischen die Grenzen (11) eingeschlossen werden kann, und daß dann somit die Gleichung (12) stets die Bewegung in erster Annäherung darstellen wird. So ergibt sich, daß das Teilchen m von m_0 bei geeigneter Beschaffenheit der Konstanten eine schwingende Zentraldistanz[1]) um r_{j_0} als Mittelwert mit der Schwingungsdauer

$$T_j = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3c_2^2}{r_{j_0}^4} - \frac{1}{m} f'(r_{j_0})}} \tag{13}$$

haben wird, in einer ersten Annäherung; über diese Bewegung werden sich andere zu vernachlässigende Bewegungen überlagern.

Mit Rücksicht auf (3') und (10) ist

$$f'(r_{j_0}) = \frac{3mc_2^2}{r_{j_0}^4} - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left(\alpha + \frac{\beta}{r_{j_0}^2} + \frac{\gamma}{r_{j_0}^4}\right),$$

somit:

$$\frac{3c_2^2}{r_{j_0}^4} - \frac{1}{m} f'(r_{j_0}) = \frac{1}{m}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left(\alpha + \frac{\beta}{r_{j_0}^2} + \frac{\gamma}{r_{j_0}^4}\right),$$

und es folgt:

$$T_j = \frac{\lambda\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{r_{j_0}^2} + \frac{\gamma}{r_{j_0}^4}}}, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Nach (9) können daher die Schwingungen der Zentraldistanz der beiden Teilchen die folgenden Schwingungsdauern haben:

$$T_j = \frac{\lambda\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha + \frac{1}{j^2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \beta + \frac{1}{j^4}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^4 \gamma}}, \quad j = 1, 2 \ldots; \tag{15}$$

eventuell können noch Oberschwingungen auftreten, deren Werte aus den genannten durch Division mit einer ganzen Zahl erhalten werden (die im übrigen für die Optik nicht in Betracht kommen).

Vergleichen wir diese Formel mit der Formel von Kayser und Runge für Spektralserien:

$$T_j = \frac{1}{a + \frac{b}{j^2} + \frac{c}{j^4}}, \tag{15'}$$

in der a, b, c Konstanten sind, so ergibt sich ohne weiteres, daß alles, was der Kayser-Rungeschen Formel gehorcht, auch unter die Herrschaft der obigen Formel gebracht werden kann[1]). Die einfachere Balmersche Formel für die Wasserstoffserie wird sich ergeben, wenn zwischen den Konstanten α, β, γ die Relationen

$$\frac{\beta}{\lambda^2} = -8\alpha, \quad \frac{\gamma}{\lambda^4} = 16\alpha$$

bestehen.

Es zeigt sich somit, daß durch das Wechselwirkungsgesetz (3) ein System mm_0 geschaffen wird, von welchem die Lichtschwingungen einer Spektralserie ausgehen können; es bleibt nur noch die Aufgabe zu erledigen, dieses Wechselwirkungsgesetz durch Schwingungen der Teilchen und ein Zwischenmedium mechanisch zu erklären. Diese Aufgabe wird in einer späteren Abhandlung ihre Erledigung finden; hier mögen noch einige Bemerkungen allgemeiner Art folgen.

Mit Rücksicht darauf, daß c_2 im allgemeinen nicht null ist, — dies muß bereits für den einfachen Fall des Wasserstoffmoleküls ausgeschlossen werden — ergibt sich ein Anschluß an diejenigen Ideen, welche mit erheblichen Umlaufsgeschwindigkeiten elektrischer Teilchen um gewisse Kerne im Molekül rechnen; eine Vereinfachung dieser Ideen ergibt sich insofern, als sich hier nur nahezu kreisförmige Bahnen und nahezu konstante Umlaufsgeschwindigkeiten der elektrischen Teilchen bei Annahme zweier Teilchen vorfinden. Eine Komplikation kann sich natürlich auch hier bei Vorhandensein einer Vielheit wirkender Teilchen ergeben. Das Wechselwirkungsgesetz (3) weist schon darauf hin, daß für die in Betracht kommenden Schwingungen, deren Folge das Wechselwirkungsgesetz sein könnte, das Zwischenmedium nicht als inkompressibel, sondern als kompressibel zu erachten sein wird, worauf die Faktoren

$$\cos\frac{r}{\lambda}2\pi, \quad \sin\frac{r}{\lambda}2\pi$$

hindeuten. Wie ist dies mit meinen mechanischen Vorstellungen über das elektro-magnetische Feld, welches das Zwischenmedium als empirisch inkompressibel ansieht, zu vereinen? Es muß offenbar für die hier in Betracht kommenden Schwingungen eine größere Kompressibilität des Zwischenmediums angenommen werden, als für die Schwingungen mit den außerordentlich kleinen Schwingungsdauern, welche im allgemeinen die Ursachen der elektromagnetischen Erscheinungen sein sollen. Hierzu ist folgendes zu bemerken: Ich habe in meinen

1) Im allgemeinen wird das Teilchen hierbei eine Umlaufsbewegung um das Teilchen m_0 ausführen, die nahezu kreisförmig ist und (infolge der zweiten Gleichung [5]) mit nahezu konstanter Umlaufsgeschwindigkeit vor sich geht.

1) Der Unterschied in den beiden Formeln ist zwar augenscheinlich, aber durch Hinzufügung von Gliedern

$$\frac{d}{j^6} + \frac{e}{j^8} + \ldots$$

im Nenner der Kayser-Rungeschen Formel zu beheben.

Veröffentlichungen schon wiederholt die Ansicht ausgesprochen, daß das Zwischenmedium, das für langsame Bewegungen kompressibel sein kann, für rasche Schwingungen mit außerordentlich kleiner Schwingungsdauer eine außerordentlich kleine Kompressibilität besitzen muß, so daß bei einer gewissen Grenze das Medium geradezu als empirisch inkompressibel anzusehen ist. Bei den Schwingungen, welche für das Zustandekommen des Wechselwirkungsgesetzes (3) in Betracht kommen, braucht diese Grenze noch nicht erreicht zu sein, mit anderen Worten diese Schwingungen sollen mit einer erheblich größeren Schwingungsdauer stattfinden als diejenigen, denen im allgemeinen die elektromagnetischen Erscheinungen ihren Ursprung verdanken. Es entspricht dies vollständig dem Gedankengange, welcher zu der „Individualitätskorrektur"[1]) des mechanischen Grundgesetzes geführt hat.

1) A. Korn, diese Zeitschr. **18**, 323, 1917.

(Eingegangen 20. Juni 1919.)

Die atomistische Konstitution einer Kristalloberfläche.

Von E. Madelung.

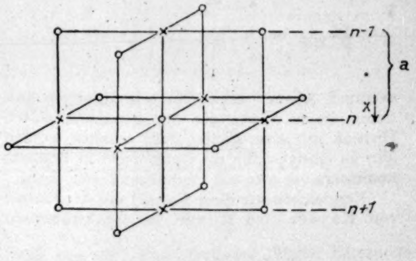
Während im Innern eines Kristalles die Atome mit der Regelmäßigkeit angeordnet sind, die dem Kristallsystem entspricht, hat man an der Oberfläche gewisse Abweichungen hiervon zu erwarten. Die Bedingungen, unter denen sich die äußersten Atome befinden, unterscheiden sich von denen der Innenatome dadurch, daß diese nicht wie außen auf allen Seiten regelmäßig von Nachbarn umgeben sind, sondern solche Nachbarn nach einer Seite nicht besitzen. Dadurch müssen Abweichungen von der regelmäßigen Anordnung entstehen, die sich bis zu einer gewissen Tiefe in den Kristall hinein fortpflanzen werden.

Aus Symmetriegründen kann man schließen, daß bei regulären Kristallen des $NaCl$-Typus nur Verschiebungen senkrecht zur Oberfläche gegenüber der normalen Anordnung auftreten können. Dieser Fall soll allein im folgenden behandelt werden.

Anschaulich kann man die Verhältnisse, die zu erwarten sind und von der Rechnung bestätigt werden, folgendermaßen schildern. Zwei Atome, z. B. Na haben die Neigung, sich in einer bestimmten Entfernung voneinander einzustellen, zwei Cl-Atome in einer andern, je ein Atom Na und eines Cl in einer dritten. Treten diese Atome aber zu einem Kristall zusammen, so müssen sie sich auf eine einzige Gitterkonstante einigen. Es werden also vielleicht die Na-Atome enger zusammentreten als ihrer Natur entspricht, die Cl aber vielleicht weiter. Diese Tendenz wird sich an der Oberfläche bemerkbar machen, indem dort die Na-Atome etwas über die mittlere Begrenzung hinaustreten, die Cl-Atome aber weiter hineintreten.

Für die Rechnung gehe ich in einer etwas schematischen Weise vor, indem ich nur Kräfte zwischen den nächsten Nachbarn annehme. Diese Hypothese hat sich bei früheren Rechnungen[1]) bewährt und liefert auf alle Fälle ein qualitativ richtiges Bild. Ferner betrachte ich die Verschiebungen als klein, so daß nur lineare Beziehungen auftreten. Schließlich nehme ich an, daß Kräfte zwischen den Atomen nur von deren Natur und ihrer Entfernung abhängen, also Zentralkräfte sind. Es ließe sich ferner denken, daß die Oberflächenatome wegen ihrer unsymmetrisch angeordneten Nachbarschaft auch innere Veränderungen erleiden und daher anders auf ihre Nachbarn wirken als die Innenatome. Hiervon muß ich aber aus Mangel an irgendwelchen Unterlagen absehen.

Das Kristallgitter des $NaCl$-Typus ist ein kubisches flächenzentriertes Raumgitter. Jedes Atom einer Art hat als nächste Nachbarn 6 Atome der andern Art im Abstand a und als zweitnächste 12 Atome der gleichen Art im Abstand $a\sqrt{2}$ (s. Fig.). Diese sollen allein



berücksichtigt werden. Die Kristalloberfläche liege parallel zu einer Würfelfläche. Ich bezeichne die Gitterpunkte der zweiten Art durch einen Index $'$. Ferner die Atome der Oberfläche durch die Indexziffer 1, der nächsten Fläche 2 usw. Von weiteren Bezifferungen kann ich aus Symmetriegründen absehen.

1) E. Madelung, Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. 1900/1910; diese Zeitschr. **11**, 818, 1910; M. Born u. Th. v. Kármán, diese Zeitschr. **13**, 297, 1912.

Die Koordinate x liegt senkrecht zur Oberfläche, ebenso die Verschiebungen u. Die Verschiebungen v und w parallel zu y und z setze ich gleich Null.

Bezüglich der Bezeichnung schließe ich mich an Born[1]) an mit folgenden Vereinfachungen: da nur je drei Größen P und Q vorkommen, unterscheide ich diese durch Indizes.

Es bezieht sich

P und Q auf zwei Atome der einen Art (Abstand $= a\sqrt{2}$),

P'' und Q'' auf zwei Atome der andern Art (Abstand $= a\sqrt{2}$),

P' und Q' auf je eines der einen und eines der andern Art (Abstand a), und ich schreibe P statt $\delta^2 P$ und Q statt $\delta^4 Q$.

Das relative Potential zweier Atome 1 und 2 sei $\varphi_{12} + \varphi^0_{12}$.

$$\varphi_{12} = P_{12}\left((u_1 - u_2)(x_1 - x_2) + \frac{(u_1 - u_2)^2}{2}\right) + \\ + Q_{12}\frac{(u_1 - u_2)^2}{2}(x_1 - x_2)^2.$$

Die Summe der φ für ein Atom der ersten Art der Fläche n wird dann

$$\Phi_n = S\varphi = 4P\left((u_n - u_{n+1})(-a) + \right. \\ \left. + (u_n - u_{n+1})^2\right) + Q\frac{(u_n - u_{n+1})^2}{2}a^2, \\ + 4P\left((u_n - u_{n-1})(a) + \right. \\ \left. + \frac{(u_n - u_{n-1})^2}{2}\right) + Q\frac{(u_n - u_{-1})^2}{2}a^2, \\ + P'\left((u_n - u'_{n+1})(-a) + \right. \\ \left. + \frac{(u_n - u_{n+1})^2}{2}\right) + Q'\frac{(u_n - u'_{n+1})^2}{2}a^2, \\ + 4P'\frac{(u_n - u'_n)^2}{2}, \\ + P'\left((u_n - u'_{n-1})(a) + \right. \\ \left. + \frac{(u_n - u_{n-1})^2}{2}\right) + Q'\frac{(u_n - u'_{n-1})^2}{2}a^2.$$

Die von den Verschiebungen herrührende Kraft parallel zu x auf dies Atom wird

$$X_n = \frac{\partial \Phi_n}{\partial u_n} = 4P(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) + \\ + 4Qa^2(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}), \\ + P'(6u_n - u_{n+1} - u_{n-1} - 4u'_n) + \\ + Q'a^2(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}).$$

Ich führe die Abkürzungen ein:

$$A = 4(P + a^2 Q) \qquad B = 4P + 4P'$$
$$A' = P' + a^2 Q' \qquad B' = 4P'$$
$$A'' = 4(P'' + a^2 Q'') \qquad B'' = 4P'' + 4P'.$$

Dann wird

$$-X_n = u_n(2A + 2A' + B') - (u_{n+1} + \\ + u_{n-1})A - u'_n B' - (u'_{n+1} + u'_{n-1})A', \\ -X'_n = u'_n(2A'' + 2A' + B') - (u'_{n+1} + \\ + u'_{n-1})A'' - u_n B' - (u_{n+1} + u_{n-1})A'.$$

Für $n = 1$ fallen in Φ_1 die Glieder mit $n - 1$ fort. Es wird daher

$$-X_1 = u_1(A + A' + B') - u_2 A - u_1' B' - \\ - u_2' A' - Ba, \\ -X_1' = u_1'(A'' + A' + B') - u_2' A'' - u_1 B' - \\ - u_2 A' - B'' a.$$

Im Gleichgewichtszustand müssen sämtliche X verschwinden: also erhält man ∞ viele lineare Gleichungen, deren Schema lautet:

u_1	u_2	u_3	u_4	…	u_1'	u_2'	u_3'	u_4'	…	
$A+A'+B'$	$-A$	$-$	$-$	…	$-B'$	$-A'$	$-$	$-$	…	$-Ba$
$-A$	$2A+2A'+B'$	$-A$	$-$	…	$-A'$	$-B'$	$-A'$	$-$	…	$-$
$-$	$-A$	$2A+2A'+B'$	$-A$	…	$-$	$-A'$	$-B'$	$-A'$	…	$-$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$-B'$	$-A'$	$-$	$-$	…	$A''+A'+B'$	$-A''$	$-$	$-$	…	$-B''a$
$-A'$	$-B'$	$-A'$	$-$	…	$-A''$	$2A''+2A'+B'$	$-A''$	$-$	…	$-$
…..	….	….	…	..	…..	……	…	…	..	….

Addiert man sämtliche Gleichungen bis zu hoher Ordnung und beachtet, daß die u_n für großes n, d. h. im Innern schließlich verschwinden müssen, so ergibt sich

$$-Ba - B''a = 0; \; B + B'' = 0,$$

also

$$P + P'' = -2P'.$$

Diese Relation muß also im Kristall gelten, um die Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen.

Das unendliche Schema löse ich durch folgenden Ansatz:

$$u_n = u_1 \cdot \alpha^{n-1}; \; u'_n = u_1' \cdot \alpha^{n-1}.$$

Dadurch reduzieren sich die Gleichungen auf folgende 4:

1. $u_1(A + A' + B' - \alpha A) - u_1'(B' + \alpha A') = \\ = - Ba,$

2. $-u_1(B' + \alpha A') + u_1'(A'' + A' + B' - \\ - \alpha A'') = - B''a = + Ba,$

3. $u_1(-A + \alpha(2A + 2A' + B') - \alpha^2 A) - \\ - u_1'(A' + \alpha B' + \alpha^2 A') = 0,$

4. $-u_1(A' + \alpha B' + \alpha^2 A') + u_1'(-A'' + \\ + \alpha(2A'' + 2A' + B) - \alpha^2 A'') = 0.$

1) Born, Dynamik der Kristallgitter, S. 20, Formel 13, 14.

Diese Gleichungen sind nicht unabhängig voneinander: Es folgt nämlich aus (1) und (2) durch Addition:

$$u_1(A+A')(1-\alpha)+u_1'(A''+A')(1-\alpha)=0$$

und aus (3) und (4)

$$u_1(A+A')(-1+2\alpha-\alpha^2)+u_1'(A''+ \\ +A')(-1+2\alpha-\alpha^2)=0,$$

d. h. jede der beiden Kombinationen liefert:

$$\frac{u_1}{u_1'}=-\frac{A''+A'}{A+A'}.$$

Wir haben also tatsächlich nur 3 unabhängige Gleichungen für die 3 Unbekannten u_1, u_1' und α. Durch obigen Ansatz ist also das System von Gleichungen zu lösen.

Die formale Berechnung dieser Größen bietet keine Schwierigkeiten. Doch führt sie zu keinen einfachen Formeln, auf deren Wiedergabe ich verzichte.

Das Ergebnis ist also: In der Oberfläche eines flächenzentrierten regulären zweiatomigen Kristalls sind die Atome der einen Art gegen die der andern senkrecht zur Oberfläche verschoben. Diese Verschiebung nimmt nach innen nach einer reinen Exponentialfunktion ab.

Die numerische Berechnung der tatsächlichen Verschiebungen u in einem speziellen Fall ist bisher nicht durchführbar, da die in Frage kommenden Größen P und Q sich nicht experimentell ermitteln lassen, sondern nur solche Kombinationen von ihnen, welche in der Kristallphysik eine Rolle spielen. Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß zwischen ihnen solche Relationen bestehen, daß die Verschiebungen gerade verschwinden. Es ist aber kein Grund für ein solches Zusammentreffen einzusehen. Im Gegenteil, es erscheint als nicht unwahrscheinlich, daß in bestimmten Fällen die Verschiebungen so groß werden, daß der Zusammenhang des Kristalls in der Oberfläche und daher auch im Innern in Frage gestellt wird. Es läßt sich denken, daß durch solche Umstände das physikalische Verhalten wie Kristallform, Dampfdruck, Löslichkeit und dgl. beeinflußt wird.

Eine andere physikalische Konsequenz läßt sich aus obigen Betrachtungen ziehen. Da die Atome von Elektrolyten (Salzen) elektrische Ladungen tragen, muß in den Kristalloberflächen eine elektrische Doppelschicht infolge der Verschiebungen auftreten. Allerdings wird diese sich der Beobachtung entziehen, da sie sich mit konstanter Stärke über die ganze Kristalloberfläche erstreckt und daher keine elektrostatischen Kräfte im Außenraum liefert.

Es wäre allerdings denkbar, daß ihre Beobachtung trotzdem gelänge, wenn man das Folgende annehmen darf: Es könnten von außen oder von innen in die Oberflächenschicht einwandernde Elektronen im Laufe der Zeit die Doppelschicht neutralisieren. Bricht man nun einen Kristall durch, so würde eine Doppelschicht nur an der durch den Bruch gebildeten frischen Oberfläche existieren und müßte sich durch elektrische Kräfte an ihrer Begrenzungslinie bemerkbar machen können. Ich habe versucht, ob sich solche nachweisen lassen, indem ich Steinsalzstäbchen durchbrach und unmittelbar darauf mit Schwefelmennigepulver bestäubte. Ich habe aber keinerlei Anzeichen für elektrische Kräfte bemerken können. Die Versuche wurden allerdings ganz roh improvisiert; eine sorgfältigere Wiederholung erscheint wünschenswert.

Schließlich darf man wohl annehmen, daß die an einem besonders einfachen Falle in Obigem geschilderten Verhältnisse auch in beliebig komplizierten Fällen qualitativ in derselben Form wiederkehren. Ja, es erscheint nicht ausgeschlossen, daß auch in Flüssigkeitsoberflächen analoge Anomalien auftreten und als die Ursache der bekannten Doppelschicht in ihnen angesprochen werden dürfen. Dafür spricht jedenfalls der Umstand, daß die kinetische Theorie des Gesetzes von Eötvös[1]) nur unter der Annahme zum richtigen Resultat führte, „daß die Anordnung der Moleküle auch in Flüssigkeiten innerhalb kleiner (wahrscheinlich dauernd wechselnder) Bereiche durch Raumgitter darstellbar ist".

1) E. Madelung, diese Zeitschr. **14**, 729, 1913.

(Eingegangen 24. August 1919.)

Eine Näherungsformel für die Sättigungsspannung des Wasserdampfes.

Von Paul Schreiber.

Wenn man im logarithmischen Doppelpapier[1]) mit 100 mm oder 250 mm Länge des Mantissenbereiches die Sättigungsspannungen s des Wasserdampfes als Ordinaten zu den absoluten Temperaturen T als Abszissen aufträgt, so ordnen sich die Punkte bis zu $T=350^0$ so an, daß sie nur durch eine gerade Linie verbunden werden können. Sonach müssen die Formeln

1) Die Logarithmenpapiere stellt die Firma C. Schleicher & Schüll, Düren (Rheinland) her. Proben und die von mir verfaßten Erläuterungsschriften können von dieser Firma bezogen werden. Man vergleiche auch Meteorol. Zeitschr. **27**, 198 ff., 1910; **32**, 443 ff., 1915 und Abh. d. naturw. Ges. Isis in Dresden 1910, Heft II.

$$s = p\,T^q$$

oder

$$\log s = \log p + q \log T$$

gültig sein. Die Koordinatenpaare

$$T_1 = 260^0,\ s_1 = 1{,}69 \text{ mm}$$

und

$$T_2 = 350^0,\ s_2 = 313{,}8 \text{ mm}$$

ergaben

$$\log s = -42{,}21197 + 17{,}57366 \log T. \quad \text{(I)}$$

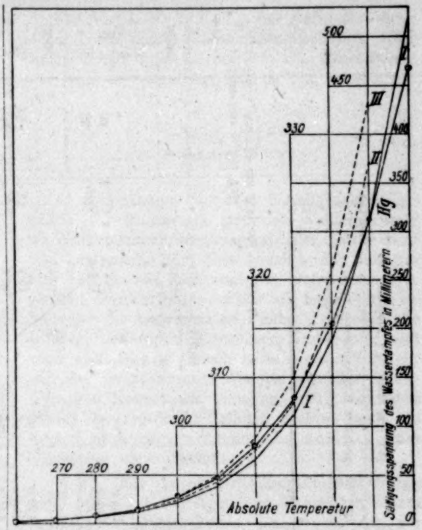
Dies ließ mich vermuten, daß die Formeln

$$s = 6 \cdot 10^{-8} (10^{-2} T)^{18} \quad \text{(II)}$$

bis

$$s = 7 \cdot 10^{-8} (10^{-2} T)^{18} \quad \text{(III)}$$

die Funktion zur Darstellung bringen könnten. In der Figur wurden durch Kreise die durch Beobachtung gefundenen Werte von s für $T = 260^0$ bis 360^0 von 10 zu 10^0 angegeben. Die Kurven I, II und III stellen den Verlauf der nach den drei Gleichungen berechneten Sättigungsspannungen dar. Die Firma Schleicher & Schüll stellt Logarithmenpapiere mit 600 mm Länge des Mantissenbereiches her. Sollte auch bei diesem Maßstab der Funktionsverlauf von einer Geraden merklich nicht abweichen, so würde für graphische Methoden die Gleichungsform als tatsächlich genügend richtig anzusehen sein und würde man nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werte von p und q abzuleiten haben. Diese Rechnung wird dann lehren, für welches Temperaturintervall ein solches Konstantenpaar gültig ist. Da die Gleichungsformen $y = a(s)^b$ sehr häufig



vorkommen, ist dies für die Anwendung der Logarithmenpapiere von hoher Bedeutung, da diese Gleichungen dann in

$$y = a\,(p\,T^q)^b = a \cdot p^b\,(T)^{qb} = a\,(T)^\beta$$

übergehen und auf dem Doppelpapier als Gerade erscheinen müssen.

Dresden, den 15. Juni 1919.

(Eingegangen 21. Juni 1919.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Der Energieinhalt der Festkörper im Lichte der neueren Forschung.

Von Erwin Schrödinger.

(Fortsetzung.)

§ 16. Läßt man in (37^2) x gegen ∞ gehen, so verschwindet das zweite Glied in der Klammer exponentiell, das erste aber nur wie x^{-3}, da das Integral gegen den endlichen Wert

$$\int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad (52)$$

konvergiert. Man hat also als Grenzausdruck

$$\lim_{T=0} C_v = 3AR \cdot \frac{12}{x^3}\frac{\pi^4}{15} = 3AR \cdot \frac{4\pi^4}{5} \cdot \frac{T^3}{\Theta^3}. \quad (53)$$

Die Näherung gilt für etwa $x > 12$, d. i. $T < \Theta/12$ mit 1 Proz. Genauigkeit. Nach diesem sog. T^3-Gesetz Debyes (oder, wenn man vom Energieinhalt spricht: T^4-Gesetz) soll sich bei genügend tiefer Temperatur jeder Körper in energetischer Hinsicht wie das Vakuum nach dem Stefan-Boltzmannschen Strahlunggesetz verhalten (s. o. § 4). Für letzteres wäre formal, $\Theta = 35000^0$ zu setzen. Die zur Prüfung von (53) geeigneten experimentellen Daten wurden in T. VI zusammengestellt. Die mit M. W. überschriebenen Spalten geben die Molekularwärmen, also — nach

Tabelle VI[1]).

(T^3-Gesetz)

Stoff	T	M. W.	Q
CaF_2 (Eucken u. Schwers)	17,5	0,0670	2,32
	19,9	0,1028	2,36
	21,5	0,1316	2,37
	23,5	0,1680	2,35
	25,6	0,2180	2,35
	27,6	0,276	2,36
	29,1	0,331	2,38
	34,0	0,536	2,39
	36,8	0,663	2,37
	37,8	0,713	2,38
	39,8	0,836	2,37
Mittel			2,36$_4$
Al (Nernst 4, 7)	19,1	0,066	2,12
	23,6	0,110	2,03
	27,2	0,162	2,01
	32,4	0,25	1,95
	33,5	0,301	2,00
	35,1	0,33	1,97
Mittel			2,01$_3$
$C_{reg.}$ Nernst 2)	88	0,028	0,345
	92	0,033	0,349
Mittel			0,34$_7$

Stoff	T	M. W.	Q
FeS_2 (Eucken u. Schwers)	(21,7	0,0648	1,85) [2])
	(23,1	0,0754	1,83)
	(24,3	0,0864	1,83)
	(25,1	0,0958	1,83)
	(26,6	0,1085	1,80)
	27,5	0,1095	1,75
	27,8	0,1130	1,74
	29,8	0,1385	1,74
	29,9	0,140	1,74
	30,3	0,140	1,74
	32,9	0,179	1,72
	33,4	0,185	1,71
	35,8	0,232	1,72
	37,0	0,260	1,73
	38,3	0,295	1,74
	42,2	0,402	1,75
	46,7	0,536	1,74
	49,0	0,622	1,75
	51,7	0,712	1,74
	54,7	0,844	1,74
	56,9	0,952	1,73
Mittel			1,73$_6$
Ca (Günther)	22,3	0,509	3,58
	24,0	0,627	3,57
Mittel			3,58

Stoff	T	M. W.	Q
Cu (Nernst 3, 4; K.-Onnes 2)	14,51	0,0396	2,35
	15,24	0,0491	2,40
	15,60	0,0506	2,37
	17,17	0,0687	2,39
	17,50	0,0726	2,39
	18,03	0,0792	2,38
	18,89	0,0930	2,40
	19,58	0,1010	2,45
	20,20	0,1155	2,42
	20,75	0,1217	2,39
	20,88	0,1247	2,40
	21,50	0,1410	2,42
	23,5	0,22	2,57
	25,37	0,234	2,43
	27,7	0,32	2,47
Mittel			2,41$_5$
CSi (Nernst 7, Günther)	52,0	0,10	0,892
	53,0	0,050	0,696
	56,6	0,143	0,924
	57,0	0,112	0,982
	59,5	0,177	0,945
	61,2	0,142	0,853
	63,1	0,197	0,923
	67,3	0,259	0,935
	68,7	0,303	0,978
	69,0	0,286	0,955
	71,3	0,335	0,975
Mittel			0,914$_4$

Stoff	T	M. W.	Q
Si (Nernst 7)	20,1	0,031	1,56
	24,0	0,053	1,57
	28,2	0,086	1,57
	33,7	0,152	1,58
	39,7	0,248	1,58
	44,6	0,352	1,58
	53,1	0,548	1,54
Mittel			1,56$_9$
Fe (Günther)	32,0	0,152	1,67
	33,1	0,177	1,70
	35,2	0,244	1,77
	38,1	0,288	1,73
	42,0	0,325	1,64
	46,9	0,522	1,71
Mittel			1,70$_3$
BeO (Günther)	76,8	0,202	0,765
	78,1	0,219	0,773
	78,8	0,195	0,739
	79,3	0,226	0,769
	79,7	0,243	0,784
	80,3	0,223	0,756
	82,6	0,236	0,750
	84,9	0,274	0,766
Mittel . . . . . : :			0,763

1) Literatur s. bei Tab. II, S. . . .
2) Nach Ansicht der Autoren gestört.

Tabelle VII.

Stoff		C	FeS_2	CaF_2	Fe	Al	Cu	Ca
Θ_{therm}	dem Gesamtverlauf angepaßt (s. Tab. II)	1860	645	474	453	398	315	226
	aus dem T^3-Gesetz (Gl. 53)	2230	645	473	455	385	321	216

unserer bisherigen Bezeichnungsweise — für CSi und $BeO: 2C_v$, für FeS_2 und $CaF_2: 3C_v$. Die Q-Spalte gibt die Quotienten

$$Q = \frac{10^2 \sqrt[3]{M.W.}}{T},$$

die nach dem T^3-Gesetz von der Temperatur unabhängig sein sollten. Wie man sieht, ist die Konstanz durchwegs recht gut erfüllt.

Es ist klar, daß keine endliche Anzahl von Gliedern der Form (22) ein solches Verhalten von $\lim_{T=0} C_v$ wiedergeben kann, daher mußte auch die sonst so erfolgreiche Nernst-Lindemannsche Formel (27^2) in diesem Punkte versagen (s. o. Tab. III). Die Tatsachen fordern gebieterisch eine (annähernd) kontinuierliche Reihe von Frequenzen bis herab zu solchen, die von viel niedrigerer Größenordnung sind als die Höchstfrequenz. —

Daß in einigen Fällen der Ausdruck (30) auch noch im Bereich der letzteren eine brauchbare Näherung bildet, zeigt die Erfahrung. Theorie und Erfahrung stimmen darin überein, daß die Abgrenzung dieser „thermisch einfachen" Körperklasse keine scharfe sein wird. Ein Kriterium für die Abgrenzung, d. h. für die Anwendbarkeit der Näherungstheorie im Einzelfall, läßt sich aus ihr selbst wegen der Allgemeinheit bzw. Unbestimmtheit ihrer Annahmen über die atomare Struktur naturgemäß nicht schöpfen. Eine Durchsicht des Beobachtungsmaterials (Tab. II und V) läßt chemische Einfachheit und reguläre Kristallsymmetrie als — zwar weder notwendige noch hinreichende — aber doch günstige Bedingungen für die Gültigkeit der Näherungstheorie erkennen.

Letzteres — die Rolle der Kristallsymmetrie — führt uns auf einen zweiten Punkt, in dem die Debyesche Theorie einer Vertiefung bedarf.

§ 17. Als echten Festkörper sieht man heute wohl allgemein nur kristallisierte Materie an und es steht von den meisten in unseren Tabellen angeführten Stoffen (ganz besonders von den Metallen!) auch experimentell fest, daß sie wirklich ein kristallines Gefüge aufweisen. Nun darf man wohl annehmen, daß der Energieinhalt nicht von der mehr oder minder vollkommenen äußeren Ausbildung der Kristallform abhängt. Dann müßte man aber von Rechts wegen die Debyesche Rechnung für das äolotrope Medium durchführen und es ist von vornherein nicht klar, daß die Funktionsform (37) dabei erhalten bleibt; jedenfalls würden in die Berechnung der für den C_v-Verlauf charakteristischen Größe Θ die wahren äolotropen Elastizitätskonstanten eingehen, schon bei regulären Kristallen bekanntlich drei an Zahl!

Für $NaCl$, KCl, CaF_2 und FeS_2 sind diese — und nur diese — Konstanten bekannt. Hier haben Hopf und Lechner[1]) die Berechnung von $\Theta_{Deb.}$ so ausgeführt, daß sie (34) erweiterten in

$$\frac{1}{\bar{c}^3} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{4\pi} \int\int \frac{d\omega}{c_i^3}. \qquad (54)$$

c_1, c_2, c_3 bedeuten die drei Schallgeschwindigkeiten für Planwellen mit der Wellennormale im Winkelelement $d\omega$ (longitudinaler, „ordinärer" und „extraordinärer" Schallstrahl). Die Integration ist über alle Richtungen zu erstrecken. Wir werden das Verfahren später als folgerichtig erkennen. In den meisten Fällen sind aber die wahren äolotropen Konstanten unbekannt und man muß sich praktisch trotz besserer Einsicht mit der quasiisotropen Theorie und den quasiisotropen Konstanten behelfen. Daß auf diese Weise die regulär-kristallinen Medien noch am besten approximiert werden, ist wohl vor jeder Rechnung einleuchtend.

§ 18. Mit dieser Unvollkommenheit hängt wohl auch das Versagen der Theorie in einem anderen wichtigen Punkt zusammen, den wir bisher vollkommen außer Betracht gelassen haben: eine etwaige Temperaturabhängigkeit von Θ, d. h. von ν_m.

Rechnet man Θ aus dem Mittelwert von $C_v^{1/3}/T$ bei tiefer Temperatur allein nach Formel (53) (Tab. VII), so überschreiten die Abweichungen von den aus dem Gesamtverlauf berechneten Θ-Werten (Tab. II) z. T. ein wenig die wahrscheinlichen Beobachtungsfehler. Hierzu kommt, daß, bei einigen besonders sorgfältigen und engmaschigen Durchmessungen, im T^3-Bereich selbst minimale, aber deutlich systematische Abweichungen vom Gesetz (53) sich gezeigt haben[2]). Man ist versucht, dies auf eine geringfügige Temperaturabhängigkeit von ν_m bzw. von Θ zurückzuführen. Die Theorie bietet eine vollkommen konsequente Handhabe in der Temperaturabhängigkeit der Elastizitätskonstanten (und der Dichte), die in (43) bzw. (44) eingehen. Aber merkwürdigerweise erweist sich nach Eucken[3]) die Variabilität insbesondere des Torsionsmoduls[4]) einiger Metalle als viel zu groß, um die Darstellbarkeit des C_v-Verlaufs durch (37^2)

1) L. Hopf u. G. Lechner, Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 643, 1914.
2) W. Nernst u. F. A. Lindemann, Berl. Ber. 1912, S. 1163; Keesom u. K.-Onnes, Leiden Comm. Nr. 143, S. 20 ff.; Nr. 147, S. 9 ff. (Amst. Proc. 17, 894, 1915; 18, 484, 1916).
3) A. Eucken, Verh. d. D. Phys. Ges. 15, 571, 1913.
4) Torsionsmodul $= \frac{3(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)\varkappa} = \rho c_t^2$.

mit einheitlichem Θ dann überhaupt noch verstehen zu können.

Tabelle VIII.

		Stoff:	*Al*	*Cu*	*Ag*
$\Theta_{Deb.}$ (n. Gl. 44)	bei Zimmertemperatur		413	341	220
	bei tiefer Temperatur		502	353	241
$\Theta_{therm.}$	aus Gesamtverlauf (s. Tab. II)		398	315	215
	aus T^3-Gesetz (Gl. 53)		385	321	—

Eucken vermutet wohl mit Recht, daß offenbar die äolotropen Konstanten viel weniger mit der Temperatur variieren, aber es bleibt merkwürdig genug, daß die quasiisotrope Theorie viel eher mit den bei Zimmertemperatur gemessenen Konstanten das (thermisch) „richtige" Θ liefert, während der aus dem elastischen Verhalten bei tiefer Temperatur erschlossene Wert thermisch unbrauchbar ist[1]).

Alles in allem genommen scheint ein näheres Eingehen auf die atomare und auf die äolotrope Struktur der festen Materie (die, wie wir heute mit Sicherheit wissen, aufs innigste zusammenhängen) für ein volles Verständnis ihres Energieinhalts unentbehrlich. Die rechnerischen Schwierigkeiten sind dabei allerdings so große, daß der praktische Erfolg bisher nicht weit über eine Konsolidierung der Debyeschen Theorie hinaus getragen hat.

Die Raumgittertheorie der Atomwärme.

§ 19. Den Grund zu dieser Theorie, von der wir hier nur einen sehr gedrängten Abriß geben können, haben Born und v. Kármán[2]) etwa gleichzeitig mit Debyes Veröffentlichung gelegt. Zu voller Allgemeinheit ausgebaut wurde sie von Born[3]), für einige Spezialfälle exakt durchgerechnet von Thirring[4]) und Born[5]).

Die geometrische Vorstellung vom Aufbau der äolotropen Materie ist die von den Kristallphysikern schon längst ausgebildete und gehegte, die durch die berühmte Laue-Friedrich-Knippingsche Entdeckung der Röntgenstrahlinterferenzen und die daran anknüpfende ausgedehnte Forschungsarbeit zur objektiven Gewißheit geworden ist[1]); im einfachsten Fall, den wir zunächst ins Auge fassen: die von den Atomen umzitterten Mittellagen bilden die Schnittpunkte dreier, im allgemeinen schiefwinkeliger Scharen paralleler, äquidistanter Ebenen.

Der dynamische Ausbau des Modells (der für die Röntgeninterferenzen, wenn man vom Temperatureinfluß absieht, entbehrlich ist) besteht darin, daß man zwischen nächstbenachbarten, oder auch allgemeiner, zwischen beliebigen Atompaaren Kräfte einführt, die in den Mittellagen verschwinden und lineare Vektorfunktionen der relativen Verrückungen sind. Aus diesem nur noch wenig verallgemeinerten (s. u. § 20) Modell konnte Born einen großen Teil der Kristallphysik formal ableiten.

Denkt man sich nun aus einem solchen „einfachen Atomgitter" wieder einen „Block" herausgeschnitten, der N „Elementarparallelopipede", folglich N Atome enthält, und sucht seine Eigenschwingungen nach der oben (§ 11) skizzierten Methode wirklich zu berechnen, so bemerkt man, daß trotz der formal-mathematischen Einfachheit des Problems (N lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten) die Sonderstellung der Randatome schier unüberwindliche Schwierigkeiten bereitet. — Sie lassen sich vermeiden, indem man den Block als Teil eines unendlichen Gitters auffaßt. Dann ist jedes Atom seiner Umgebung gegenüber in derselben geometrischen und dynamischen Situation, die unendlich vielen Differentialgleichungen der Bewegung reduzieren sich auf drei Typen und lassen sich leicht integrieren. Als Eigenschwingungen erhält man drei dreifach ausgedehnte Kontinua stehender Planwellen: Wellennormale beliebig, Wellenlänge innerhalb gewisser Grenzen (s. u.) beliebig, nach Festlegung beider noch drei Polarisationstypen.

Der exakte Nachweis[2]), welche Auswahl dieser unendlich vielen Eigenschwingungen des unendlichen Gitters einem endlichen Teil desselben zuzurechnen sei, verursacht die bedeutendsten Schwierigkeiten, die wir hier völlig übergehen müssen. Das Ergebnis ist von denkbarster Einfachheit. Auf das Volumen V entfallen

$$\frac{V}{\lambda^2} d\left(\frac{1}{\lambda}\right) d\omega \tag{55}$$

Eigenschwingungen einer Type von der Wellenlänge zwischen λ, $\lambda + d\lambda$ und mit der Wellennormale im Raumwinkelelement $d\omega$.

1) Einen Erklärungsversuch s. b. A. Eucken, I. Conseil Solvay, Deutsche Ausgabe S. 387. (Halle a. S. bei Knapp 1914.)

2) M. Born u. Th. v. Kármán, diese Zeitschr. **13**, 297, 1912; **14**, 15, 1913. — S. a. M. Born, ebend. **15**, 185, 1914; P. Debye u. J. Kern, ebend. S. 496.

3) M. Born, Dynamik der Kristallgitter, bei Teubner 1915. — W. Dehlinger, diese Zeitschr. **15**, 276, 1914; Dissertation München.

4) H. Thirring, diese Zeitschr. **14**, 867, 1913; **15**, 127, 180, 1914.

5) M. Born, Ann. d. Phys. (4) **44**, 605, 1914.

1) Referate: M. v. Laue, Jahrb. d. Rad. u. El. **11**, 308, 1914; A. Jonsohn, ebend. **14**, 52, 1917; W. Voigt, diese Zeitschr. **19**, Heft 15ff., 1918.

2) M. Born u. Th. v. Kármán, diese Zeitschr. **14**, 65, 1913.

Die große Allgemeinheit dieses Resultats, dem nichts der Kristallsymmetrie oder der Gitterstruktur Eigentümliches anhaftet, erklärt sich daraus, daß die kinematische Möglichkeit einer Welle ausschließlich von ihrer Länge, nicht von ihren sonstigen Bestimmungsstücken abhängt[1]). Der Ausdruck ist in der Tat auch für beliebig äolotrope Kontinua gültig; im Falle der Isotropie deckt er sich mit (30). Die ganze Komplikation bei der weiteren Anwendung liegt in der Art, wie die Schwingungszahl ν von der Wellenlänge und Richtung der Wellennormale abhängt.

Sehen wir von dem, was die Raumgittertheorie darüber aussagt, vorläufig noch ab, und setzen für die drei Wellentypen bzw.

$$\lambda = \frac{c_1}{\nu}; \quad \lambda = \frac{c_2}{\nu}; \quad \lambda = \frac{c_3}{\nu}, \tag{56}$$

so erhalten wir die früher geforderte Verallgemeinerung der Debyeschen Theorie für das äolotrope Kontinuum. Die c_i sind die aus den gemessenen Elastizitätskonstanten (und der Dichte) in bekannter Weise zu bildenden Schallgeschwindigkeiten für die Longitudinal- und die beiden polarisierten Transversalwellen. Sie hängen von der Achsenrichtung von $d\omega$ ab. Durch Integration über $d\omega$ und Summation erhält man insgesamt zwischen ν und $\nu + d\nu$

$$\frac{12\pi V}{\bar{c}^3}\nu^2 d\nu \tag{57}$$

Eigenfrequenzen, wo $\bar{c}$ die schon oben benutzte Abkürzung (54). Diese geänderte Bedeutung von $\bar{c}$ ist aber auch das einzige, wodurch sich (57) von (30) [unter Rücksicht auf (34)] unterscheidet. Bricht man wieder bei der $3N^{\text{ten}}$ Frequenz ab, so erhält man wieder (35) usw., kurz die Debyesche Theorie ohne jede weitere Änderung[2]). —

Ganz anders, wenn man in (55) jene Abhängigkeit zwischen ν und λ einsetzt, die die Gittertheorie wirklich liefert. Es stellt sich nämlich heraus, daß die Struktur für die kürzesten, mit dem Atomabstand vergleichbaren Wellen merkliche Dispersion hervorruft. Das Produkt $\nu\lambda$ — die Fortpflanzungsgeschwindigkeit — ist für eine Wellentype und gegebene Normalenrichtung nicht mehr konstant, sondern variiert auch noch mit λ. Als Folge davon ergibt sich das Abbrechen des Spektrums bei hohen Schwingungszahlen „automatisch".

Ein Beispiel soll das klarer machen. Wir wählen etwa: Einfaches kubisches Gitter, Würfelkante b, stehende Longitudinalwelle in Richtung einer Würfelkante, die zu ihr senkrechten Atomebenen schwingen als ganze, undeformiert, in Richtung der Kante, und zwar unisono mit zeitlich unveränderlicher, von einer Ebene zur nächsten periodisch veränderlicher Amplitude. In diesem Spezialfall lautet die Dispersionsgleichung

$$\nu = \nu_g \sin\frac{\pi b}{\lambda}, \tag{58}$$

wo ν_g von der Atommasse und den Atomkraftparametern in einfacher Weise abhängt. Für lange Wellen wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c_\infty = \lim_{\lambda=\infty} \nu\lambda = \nu_g \pi b, \tag{59}$$

was, beiläufig bemerkt, eine Relation zwischen den Atomkraftparametern und den meßbaren Elastizitätskonstanten darstellt. Wird λ mit b vergleichbar, so nimmt c etwas ab, für $\lambda = 2b$ auf den Bruchteil $\frac{2}{\pi} = 0{,}658\cdots$. Läßt man λ noch kleiner werden, so erhält man nichts Neues! ν nimmt wieder ab, die Wellenlänge — der doppelte Abstand zweier Knotenebenen — in Wahrheit wieder zu![1]) ν_g ist eine echte und wahre obere Grenzfrequenz für Wellen dieser Type und Richtung.

Wie sieht nun das betreffende Teilspektrum (55) aus? Mit (58) wird

$$\frac{V}{\lambda^2} d\left(\frac{1}{\lambda}\right) d\omega = \frac{V}{\pi^3 b^3} \cdot \frac{(\arcsin \nu/\nu_g)^2}{\sqrt{\nu_g^2 - \nu^2}} d\nu\, d\omega. \tag{60}$$

Solange $\lambda >> b$, also $\nu << \nu_g$, ist die Verteilung [mit Rücksicht auf (59)]:

$$\frac{V}{c_\infty^3} \nu^2 d\nu d\omega, \tag{61}$$

also ganz von der Art, wie bei Debye [s. (30)]. In der Nähe der Grenzfrequenz ν_g, wo der Nenner verschwindet, häufen sich, als Folge der Dispersion, die Eigenfrequenzen noch stärker, um bei $\nu = \nu_g$, ganz konform der früheren Konzeption, schroff abzubrechen.

Ähnlich verhält sich jedes solche Teilspektrum. Fundamental wichtig ist, daß ν_g nicht für alle denselben Wert hat, sondern eine (dreiwertige) kontinuierliche Funktion der Achsenrichtung von $d\omega$ ist: die Grenzfrequenz variiert von Richtung zu Richtung und von einer Wellentype zur anderen.

Die Hauptvernachlässigung der Debyeschen Theorie (selbst in der obigen Ausdehnung auf äolotrope Kontinua) besteht offenbar darin, daß sie statt dieser dreiwertigen Richtungsfunktion ein Generalmittel ν_m

1) Eine Veranschaulichung bei L. Flamm, diese Zeitschr. 19, 122, 1918.

2) s. a. D. A. Goldhammer, diese Zeitschr. 14, 1185, 1913.

1) $\lambda = 2b$ heißt, Nachbarebenen haben entgegengesetzt gleiche Amplitude. Rascher kann die Amplitude von Ebene zu Ebene nicht variieren.

einsetzt, so gewählt, daß es die Gesamtzahl der Freiheitsgrade auf den richtigen Wert $3N$ bringt.

Nach Born wird man der Wahrheit schon näher kommen, wenn man wenigstens für jede der drei Wellentypen eine besondere Grenzfrequenz bestimmt[1]). Wir übergehen die Details, wie das zu geschehen hätte, da sie bisher keine praktische Bedeutung bekommen haben. Für C_v erhält man (in der Bezeichnung der Tab. V):

$$C_v = \frac{1}{3}[D(\Theta_1) + D(\Theta_2) + D(\Theta_3)], \qquad (62)$$

wo Θ_1, Θ_2, Θ_3, wie bei Debye, Funktionen der makroskopischen Elastizitätskonstanten und der Dichte sind. —

§ 20. Der bisher behandelte einfachste Fall, daß jedes Atom sich gegenüber seinen Nachbarn in der gleichen geometrischen und dynamischen Situation befindet, kann in Strenge nur bei Elementen zutreffen. Die Röntgenkristallforschung hat ergeben, daß bei chemischen Verbindungen nicht etwa die Moleküle in den Punkten eines einfachen Gitters zu placieren sind; will man sich schon so ausdrücken, so ist jedenfalls der Zusatz nötig: Moleküle mit unveränderlicher mittlerer Atomkonfiguration und in paralleler Orientierung. Da aber mit großer Schärfe viele Atomanordnungen festgestellt sind (z. B. die der Alkalihalogenide[2]), die eine definite Abgrenzung des chemischen Moleküls im Kristall überhaupt nicht gestatten, drückt man sich besser so aus: Es sind mehrere (n) kongruente Atomgitter ineinandergestellt, in paralleler Orientierung und um gewisse Vektoren gegeneinander verschoben. Jedes von ihnen kann mit einer anderen, es können aber auch einige davon mit derselben Atomart besetzt sein. Ja, es stellt sich heraus, daß man Mehrfachheit des Gitters — oder in der anderen, weniger passenden Sprechweise: Mehratomigkeit des Moleküls — auch schon für Elemente zulassen muß.

Was fügt diese letzte Verallgemeinerung des Modells dem Spektrum der Eigenfrequenzen hinzu? — Alles bisher Gesagte bleibt unverändert aufrecht, wenn man nur unter V auch jetzt ein Volum $= N$ Elementarparallelopipeden des einfachen Gitters versteht (V enthält also jetzt $n \times N$ Atome gleicher oder verschiedener Art).

1) S. a. D. A. Goldhammer l. c. dann M. Brillouin, Ann. d. Phys. (9) 1, 433, 1914.

2) Die Alkali- und Halogenatome stehen in den ganzzahligen Punkten eines rechtwinkligen Koordinatensystems; und zwar die einen in den Punkten mit gerader, die anderen in denen mit ungerader Koordinatensumme; jedes Alkali hat also sechs gleichweit entfernte nächste Halogen-Nachbarn und vice versa.

Die Vermehrung der Freiheitsgrade von $3N$ auf $n \times 3N$ spricht sich darin aus, daß zu den 3 elastisch-akustischen Wellentypen $3(n-1)$ weitere hinzutreten, die ebensoviel weitere Spektralzweige (55) bilden. Die neuen Bewegungstypen — ich will sie „2. Art" nennen — bestehen, grob gesprochen, in Parallelverschiebungen der n einfachen Gitter gegeneinander: für $\lambda = \infty$ (dieser Fall ist am leichtesten zu übersehen) führen sie — jedes einzelne undeformiert — als n starre Körper einfach-harmonische Translationsschwingungen gegeneinander aus.

Soll die ganze Anordnung überhaupt stabil sein, so muß eine Verrückung der letztgenannten Art auch wirklich Reaktionskräfte wachrufen. Daher kann dieser Schwingung unmöglich die „Frequenz 0" zukommen; das Dispersionsgesetz muß also für die Wellentypen 2. Art von ganz anderem Charakter sein. In der Tat ergibt sich: Solange die Wellenlänge (= doppelter Abstand der Knotenebenen) groß ist gegen die Atomabstände, ist für diese Wellentypen nicht das Produkt $\nu\lambda$, sondern ν selbst konstant, und zwar auch von der Richtung der Wellennormale unabhängig!

Von größter Bedeutung ist folgendes: Sind einzelne Atomarten elektrisch geladen, so wird bei diesen Schwingungen — und hauptsächlich bei ihnen — ein elektrisches Moment der Volumeinheit geweckt. Daher werden umgekehrt gerade sie durch einfallende elektrische Wellen erregt werden und zwar durch optische und ultraoptische natürlich langwellige unter ihnen. Das läßt uns folgendes Ergebnis der exakten Rechnung verstehen:

Die $3(n-1)$ Grenzfrequenzen 2. Art treten als Eigenfrequenzen (der Helmholtz-Kettelerschen Art) in der optischen Dispersionsformel auf[1]). —

Zur Berechnung des Energieinhalts liegt es nahe, die neuen Spektralzweige ähnlich zu approximieren, wie die drei elastisch-akustischen: Man sieht von den Besonderheiten bei kleiner Wellenlänge ab und setzt durchwegs das Grenzgesetz, diesfalls:

$$\nu = \text{const} = \nu_l \quad l = 4, 5, \cdots 3n. \qquad (63)$$

In dieser Näherung liefert dann jeder Zweig offenbar ein Glied vom monochromatischen Einsteinschen Typus (21) bzw. (22). Für die Wärmekapazität des mittleren Grammatoms (N

1) Der erste, der optische Eigenschwingungen aus einem Gittermodell und den elastischen Eigenschaften erfolgreich berechnet hat, war Madelung, Gött. Nachr. 1909, S. 100; 1910, S. 43; diese Zeitschr. 11, 898, 1910 — Über einige spezielle Gittertypen s. M. Born, Berl. Ber. 1918, S. 604.

Atome; $\frac{N}{n}$ Elementarparallelepipede) erhält man, in den früheren Bezeichnungen:

$$C_v = \frac{1}{3n}\left[\sum_{l=1}^{3} D(\Theta_l) + \sum_{l=4}^{3n} E(\Theta_l)\right];$$

$$\Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3 \text{ aus elast. Konstanten}; \qquad (64)$$

$$\Theta_l = \frac{h\nu_l}{k} \qquad l = 4,\ 5, \cdots 3n.$$

Durch die gemessenen Elastizitätskonstanten lassen sich die ν_l bzw. Θ_l-Werte 2. Art im allgemeinen nicht ausdrücken. Wohl liefert die Rechnung sie — natürlich — als Funktionen der Atommassen und -kraftparameter. Aber die Zahl der letzteren muß im allgemeinen größer angenommen werden als die der unabhängigen Elastizitätskonstanten. Daher können die Beziehungen von der Art (59) die Kraftparameter nie eindeutig liefern, sondern nur gewisse Kombinationen von ihnen. In den Grenzfrequenzen 2. Art treten sie im allgemeinen in anderen Kombinationen auf.

§ 21. Eine volle Aufklärung für das seltsame Zusammentreffen der Reststrahlenfrequenz mit der Debyeschen Grenzfrequenz ergibt sich aus dem Gesagten vorerst noch nicht. Im Gegenteil: Da für die Alkalihalogenide mindestens $n = 2$ ist (für Flußspat gar $= 3$), scheint die Darstellung durch eine D-Funktion überhaupt inadäquat. In dieser Erwägung hat denn auch Nernst[1]) vorgeschlagen, hier

$$C_v = \tfrac{1}{2}[D(\Theta) + E(\Theta')] \qquad (65)$$

zu versuchen, wobei für Θ der „elastische" [allenfalls der Lindemannsche, Gl. (47)], für Θ' der Reststrahlen-Wert einzusetzen wäre. Dabei bedeutet das Zusammenlegen der ersten drei Θ-Werte die bekannte Näherung; das zweite Tripel fällt wegen der hohen (regulären) Symmetrie auch der Theorie nach zusammen. — (65) stimmt für $NaCl$ und KCl merklich schlechter, als die frühere Darstellung; $AgCl$ wird recht gut wiedergegeben.

Die Aufklärung dieses zunächst recht unbefriedigenden Sachverhalts ist in dem geringen Unterschied der Atommassen (23, 35; 39, 35; dagegen 108, 35) und darin zu suchen, daß die Auffassung der Spektralzweige zweier Art als monochromatisch doch wieder nur eine Näherung ist, die in gewissen Grenzfällen notwendig versagen muß. Man kann ja ein 2-faches Gitter vom Typus der Alkalihalogenide (s. § 20 Anm.) dadurch kontinuierlich in ein einfaches überführen, daß man die Atommassen und die Kraftparameter[1]) allmählich gleich werden läßt. Dabei müssen die Zweige zweiter Art mit denen erster Art allmählich verschmelzen; sie können daher bei geringem Massenunterschied auch nicht angenähert monochromatisch sein. Daß selbst beim Steinsalz die Verschiedenheit der Atommassen das mechanische Spektrum nur wenig beeinflußt, läßt sich aus Rechnungen Thirrings[2]) entnehmen, während andererseits eine gewisse Überlegung von Born u. Kármán[3]) starke Anhaltspunkte dafür gibt, daß die Monochromasie bei starker Verschiedenheit der Massen am genauesten zutrifft.

In einer Reihe solcher Fälle, die der Debyeschen Formel durchaus widerstreben würden, finden wir denn auch, daß Formelbildungen vom Typus (64), (65) den C_v-Verlauf gut wiedergeben (s. Tab. V); hierher ist insbesondere auch die Form

$$C_v = 1/n\, D(\Theta)$$

bei tiefer Temperatur zu rechnen, die man dadurch erklären kann, daß die E-Glieder bereits erloschen sind. — Mehr als diese formal-mögliche Übereinstimmung läßt sich bis jetzt wohl nicht konstatieren. —

Als wichtiges bisheriges Ergebnis halten wir nochmals fest: Die exakte Übereinstimmung der optischen Eigenfrequenzen mit den elastisch berechneten oder die Vorhersage des thermisch-energetischen Verhaltens aus den Frequenzen der einen oder der anderen Art allein ist bei komplizierterer Struktur im allgemeinen nicht mehr zu erwarten; die Übereinstimmung der Größenordnung ist ein wertvoller Beweis dafür, daß im Kristall Atomkräfte der gleichen Art und Größenordnung einerseits den Zusammenhalt zwischen den chemisch verschiedenen Atomen, anderseits den Zusammenhalt des ganzen Kristallgefüges hervorbringen[4]).

1) W. Nernst, Göttinger Vorträge (bei Teubner 1914). S. 81 ff.

1) Die wichtigsten Kraftparameter: „Halogen → Alkali" und „Alkali → Halogen" sind schon nach dem Gegenwirkungsprinzip gleich!

2) H. Thirring, diese Zeitschr. 15, 132, 1914.

3) M. Born u. Th. v. Kármán l. c. § 5: Gitterlinie, abwechselnd mit Atomen und mit Elektronen besetzt.

4) Anmerkung bei der Korrektur: Sieh hiezu M. Born u. A. Landé, Über die absolute Berechnung der Kristalleigenschaften mit Hilfe Bohrscher Atommodelle, Berl. Ber. 1918, 1048; P. Debye u. P. Scherrer, Atombau, diese Zeitschr. 19, 474, 1918.

(Schluß folgt.)

BESPRECHUNGEN.

Rudolf Mehmke, Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung. In zwei Bänden. Erster Band: Punktrechnung. Erster Teilband: Das Rechnen mit Punkten, Geraden und Ebenen (Erste Hälfte). Grundzüge der projektiven Geometrie. Anwendungen und Übungen. VIII, 394 S. mit 152 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 1913. M. 14.—

Durch Zufall ist das vorliegende Buch, von dessen zwei Bänden nur der erste Teilband des ersten Bandes erschienen ist, in dieser Zeitschrift nicht referiert worden. Da es sich um ein Werk von grundlegender Bedeutung handelt — es gibt wohl kein ähnliches Werk über Punktrechnung in deutscher Sprache — und da gerade der Physiker an der Entwicklung dieser Rechnungsarten Interesse hat, so sei es gestattet, nachträglich noch auf diese 1913 erschienene Arbeit hinzuweisen. Das um so mehr, als hoffentlich auch die fehlenden Teile noch erscheinen werden. Durch die Entwickelung der Relativitätstheorie werden allgemeinere geometrische Rechnungsmethoden als die Vektorenrechnung im üblichen engeren Umfang mehr und mehr ein notwendiger Studiengegenstand des Physikers. Eine systematische Pflege solcher Disziplinen ist erwünscht, und die aus so berufener Feder hervorgegangenen Vorlesungen verdienen besondere Aufmerksamkeit. Mehmke will eine umfassende Darstellung der Punktrechnung geben, und als deren besonderen Fall eine, voraussichtlich ebenso umfassende, Vektorenrechnung. Letztere von Graßmannschen Gesichtspunkten aus entwickelt zu sehen, wird gerade dem Physiker willkommen sein. Die meisten Lehrbücher gehen ja über die eigentliche Begründung des Vektorenbegriffes einfach hinweg.

Mehmke beginnt im vorliegenden Teile mit der Punktrechnung (S. 1—178). Mit Virtuosität benutzt er dieselbe alsdann zu einer, die Fruchtbarkeit der Methoden glänzend erweisenden, ziemlich weitgehenden Darstellung der projektiven Geometrie (S. 179—358). Die Punktrechnung wird sozusagen an diesem Objekte eingeübt. Die Darstellung erscheint geeignet, den Leser anzuregen zum Studium der Klassiker des Gebietes: Graßmann, Möbius, Hamilton usw. Obwohl der Physiker die Punktrechnung lieber auf physikalische Probleme angewendet sehen würde, so unterliegt es doch keinem Zweifel, daß die projektive Geometrie, wenn sie in so eleganter Art gegeben wird, für den Physikstudierenden ein nicht zu unterschätzendes Bildungsmittel ist. Kaum eine andere Disziplin dürfte den Blick für Analogien so schulen, als eine solche Behandlung der projektiven Geometrie. Mehmke legt großen Wert auf Dualitätsmethoden zur Ableitung neuer Sätze. Die systematische Behandlung von Korrelationen, der wir hier begegnen, muß unwillkürlich dazu anregen, das physikalische Denken nach ähnlichen Prinzipien zu organisieren. Es drängt sich sogar das Gefühl auf, daß mutatis mutandis ähnliche Methoden wie sie hier zur Ableitung geometrischer Sätze benutzt werden, in der Physik in einem bisher nicht gekannten Grade eine Rolle spielen könnten, um aus bekannten Erscheinungsgruppen neue abzuleiten. Eine nähere Inhaltsangabe erscheint hier überflüssig — wer sich für den Gegenstand interessiert, wird es jedenfalls nicht bereuen, dieses hervorragende Werk genau durchzusehen.

H. Hörig.

Personalien.

Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: Der frühere Vorstand der Hauptstation für Erdbebenforschung in Straßburg Geh. Regierungsrat Professor Dr. Oskar Hecker an der Universität Jena für Geophysik und Erdbebenforschung, an der Universität Hamburg Dr. Ernst Tams für Geophysik, insbesondere Seismologie.

Ernannt: Der ord. Professor der Mathematik und Mechanik an der Technischen Hochschule Delft Dr. J. Klopper zum Rektor und Dr. J. Clay zum Lehrer für Naturkunde an der neugegründeten Indischen Technischen Hochschule in Niederländisch-Indien, Dr. Heinrich Ficker zum ord. Professor für Meteorologie und Geophysik, der frühere a. o. Professor an der Universität Straßburg (z. Z. an der Universität Frankfurt) Dr. Edgar Wedekind zum ord. Professor der Chemie an der Forstakademie Hann.-Münden.

Berufen: Der Privatdozent an der Universität Göttingen Professor Dr. Erwin Madelung zum a. o. Professor der Physik an der Universität Kiel, der ord. Professor an der Universität Freiburg i. d. Schweiz Dr. Tadeusz v. Estreicher zum ord. Professor für allgemeine Chemie an der Universität Krakau, der bisherige Professor am Polytechnikum in Riga Dr. Paul Walden zum ord. Professor der Chemie an der Universität Rostock, der frühere Professor an der Universität Moskau Dr. Fischer zum ord. Professor für anorganische Chemie an der Universität Posen, der Dozent an der Universität Krakau Dr. A. Galecki zum a. o. Professor der physikalischen Chemie an der Universität Posen, der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Ernst Berl zum ord. Professor für chemische Technologie an der Technischen Hochschule Karlsruhe.

Gestorben: Der Vorsitzende des Aufsichtsrats der Siemens & Halske A.-G. Geh. Regierungsrat Dr. Werner v. Siemens.

Angebote.

Jüngerer Mathematiker oder Physiker

wird als **Assistent für Mechanik** an der Technischen Hochschule zu Aachen gesucht. Gehalt 250 M. monatlich (für Verheiratete mehr). Anmeldungen an **Prof. v. Kármán**, Technische Hochschule Aachen.

Gesuche.

Promovierter Physiker,

erfahren in Hochfrequenz, Meßinstrumenten **sucht** neue Stellung. Angebote unter **S. H. 553** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2 erbeten.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.